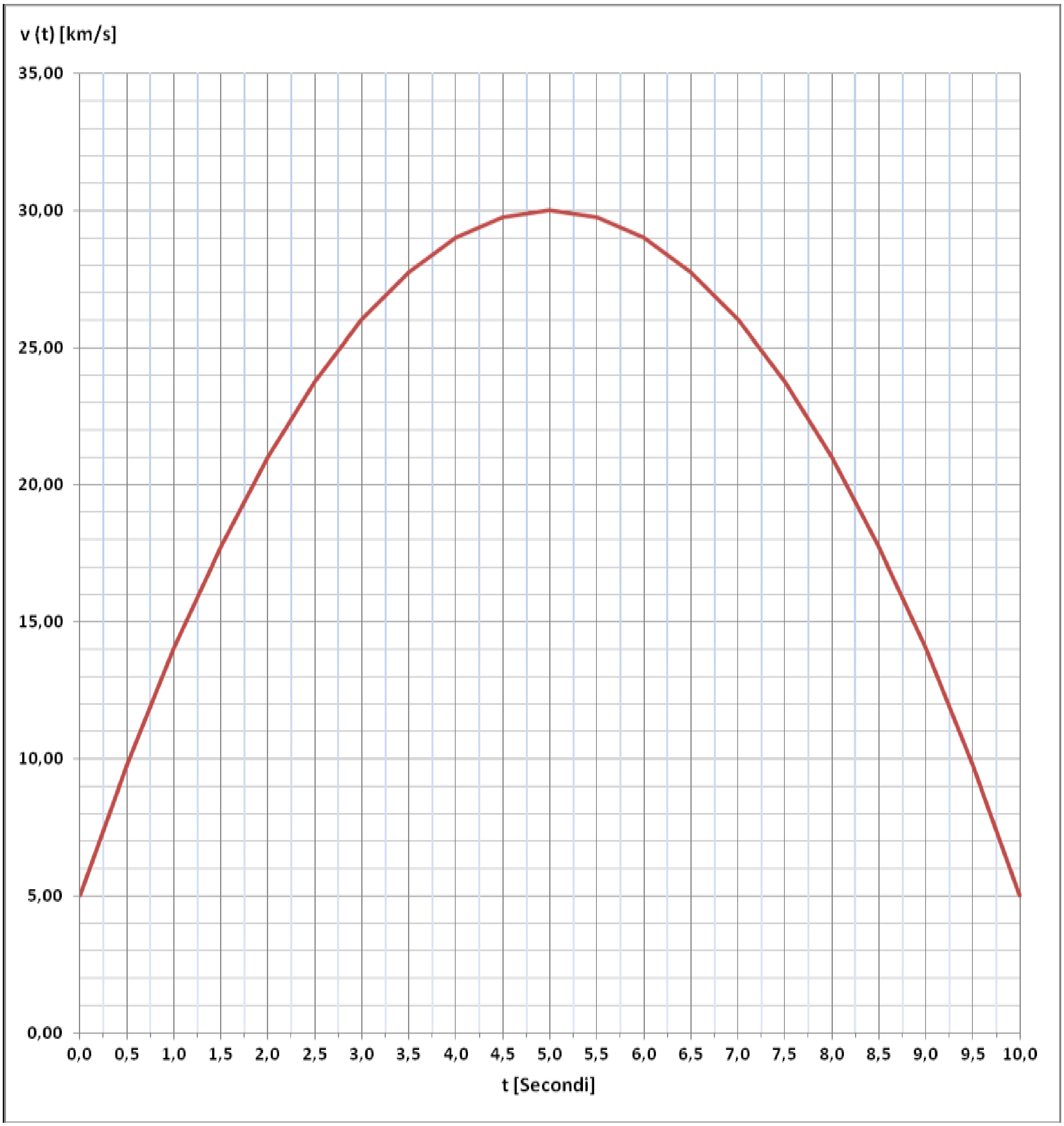
## Una collisione tra meteoriti

Marco e Luca, durante la visita guidata ad un museo scientifico interattivo, osservano su un monitor la simulazione della collisione tra due meteoriti, effettuata da un videogioco. Sul monitor sono rappresentate la traiettoria del primo meteorite e il grafico della sua velocità in funzione del tempo, mostrato in figura.



In base alle loro conoscenze di matematica, discutono sul tipo di curva geometrica rappresentata dal grafico e cercano di determinarne l'equazione, necessaria per procedere nella simulazione.

1. Aiuta Marco e Luca a determinare l'equazione che rappresenta la curva, spiegando il procedimento seguito.

Dopo che Marco e Luca hanno scritto sul terminale l'equazione trovata, il videogioco si complimenta con loro e sul monitor appare la seguente espressione:

$$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 5t, \ con \ t \geq 0.$$

Viene quindi chiesto loro di verificare se la funzione data rappresenta lo spazio percorso dal meteorite in funzione del tempo (legge oraria del moto).

2. Aiuta Marco e Luca a verificare che la funzione apparsa sul monitor rappresenta la legge oraria del moto, spiegando il procedimento seguito.

A questo punto sul monitor appare un secondo meteorite, la cui traiettoria interseca quella del primo meteorite in un punto P. Il videogioco chiede quale condizione deve essere verificata affinché avvenga l'urto.

3. Aiuta Marco e Luca a rispondere in modo qualitativo.

Marco e Luca rispondono correttamente e il primo meteorite viene colpito dal secondo e devia dalla traiettoria originaria modificando il suo moto. Dopo l'urto il monitor indica che il primo meteorite si muove ora con la nuova legge oraria:

$$s(t) = 2t^2 + \frac{5}{3}t$$

Il videogioco chiede quindi di determinare il tempo $t_{urto}$ in cui è avvenuto l'urto.

Aiuta Marco e Luca a:

4. determinare il tempo $t_{urto}$;
5. studiare la legge oraria del primo meteorite nell'intervallo tra 0 e $3 \cdot t_{urto}$ secondi, evidenziando la presenza di eventuali punti di discontinuità e/o di non derivabilità e tracciandone il grafico.

## Soluzione

**1]** La curva geometrica rappresentata dal grafico nel piano *t-v* è una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse *v* la cui equazione è del tipo $v(t) = at^2 + bt + c$ oppure, note le coordinate del vertice ($t_V$,$v_V$), del tipo $v - v_V = a\left(t - t_V\right)^2$ (con $a$<0 poichè è convessa ovvero ha la concavità volta verso il basso).
La sua equazione si determina sostituendo le coordinate del vertice V(5,30)
$v - 30 = a \cdot (t - 5)^2$

$$v - 30 = a\ (t - 5)^2 \qquad \textbf{(1)}$$

e imponendo il passaggio per il punto A(0,5).
$\left(5 - 30 = a \cdot (0 - 5)^2, a\right)$ si ottiene

$$-1 \qquad \textbf{(2)}$$

Quindi l'equazione della velocità in funzione del tempo (con $t \geq 0$) del primo meteorite rappresentata nel grafico è:
$v - 30 = -1 \cdot (t - 5)^2$

$$v - 30 = -(t - 5)^2 \qquad \textbf{(3)}$$

$$v - 30 = -t^2 + 10\,t - 25 \qquad \textbf{(4)}$$

$$v = -t^2 + 10\,t + 5 \qquad \textbf{(5)}$$

**2]** La funzione $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5\,t^2 + 5\,t$ che apppare sul monitor rappresenta la legge oraria del moto del primo meteorite se la sua funzione derivata prima coincide con la funzione v(t) ricavata al punto **1**.
$s'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(-\frac{1}{3}t^3 + 5\,t^2 + 5\,t\right)$

$$\mathrm{D}(s)(t) = -t^2 + 10\,t + 5 \qquad \textbf{(6)}$$

Poichè l'espressione della funzione **(5)** coincide con la **(6)**, si è verificato che $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5\,t^2 + 5\,t$ che apppare sul monitor rappresenta la legge oraria del moto del primo meteorite.

**3]** Supposto che le traiettorie siano complanari in un piano x-y e abbiano equazione f(x,y)=0 e g(x,y)=0, l'urto avviene se nello stesso istante i due meteoriti si trovano nello stesso punto di coordinate U($x_U$,$y_U$) in cui le curve delle traiettorie s'intersecano ovvero se l'equazione f($x_U$,$y_U$)=g($x_U$,$y_U$) è identicamente soddisfatta.

**4]** La legge oraria del primo meteorite cambia nell'istante corrispondente al punto d'intersezione delle due leggi orarie (altrimenti si verificherebbe un salto temporale)
$-\frac{1}{3} \cdot t^3 + 5 \cdot t^2 + 5 \cdot t = 2 \cdot t^2 + \frac{5}{3} \cdot t$ ottenendo le soluzioni

$$0, 10, -1 \qquad \textbf{(7)}$$

Solo l'istante t=10 s è accettabile, sono da scartare tempi negativi e l'istante iniziale t=0 s in cui il primo meteorite parte.

5] La legge oraria del primo meteorite nell'intervallo tra 0 e $t_{urto}$ ovvero tra 0 s e 30 s è una funzione definita a tratti:

$$h(t) := \begin{cases} -\frac{1}{3}\cdot t^3 + 5\cdot t^2 + 5\cdot t & 0 \le t \le 10 \\ 2\cdot t^2 + \frac{5}{3}\cdot t & 10 < t \le 30 \end{cases} :$$

h(t) è una funzione continua in t=10 infatti:

$$\lim_{t \to 10^-} \left(-\frac{1}{3}\cdot t^3 + 5\cdot t^2 + 5\cdot t\right) = \lim_{t \to 10^+} \left(2\cdot t^2 + \frac{5}{3}\cdot t\right)$$

$$\frac{650}{3} = \frac{650}{3} \tag{8}$$

La funzione passa per il punto I(10,650/3) ≈ (10,200)

Per rappresentare h(t) studio prima la funzione $s1(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5\,t^2 + 5\,t$ in [0,10] e poi considero la funzione $s2(t) = 2\cdot t^2 + \frac{5}{3}\cdot t$ in ]10,30].

$0 = -\frac{1}{3}t^3 + 5\,t^2 + 5\,t$ ottenendo le soluzioni

$$0,\ \frac{15}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{285},\ \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{285} \tag{9}$$

in [0,10] la funzione si annulla solo in t=0

$-\frac{1}{3}t^3 + 5\,t^2 + 5\,t > 0$

in ]0,10] la funzione è positiva.

La sua derivata prima ha equazione $s' = -t^2 + 10\,t + 5$ in [0,10]

$0 = -t^2 + 10\,t + 5$ ottenendo

$$5 + \sqrt{30},\ 5 - \sqrt{30} \tag{10}$$

in [0,10] s' non si annulla.

$-t^2 + 10\,t + 5 > 0$ ottenendo

$$\{t < 5 + \sqrt{30},\ 5 - \sqrt{30} < t\} \tag{11}$$

in [0,10] s' è sempre positiva quindi la funzione è sempre crescente.

La sua derivata seconda ha equazione $s'' = -2\cdot t + 10$ in [0,10]

$0 = -2\cdot t + 10$

$$5 \tag{12}$$

in [0,10] si annulla per t=5.

$-2\cdot t + 10 > 0$ *ottenendo*

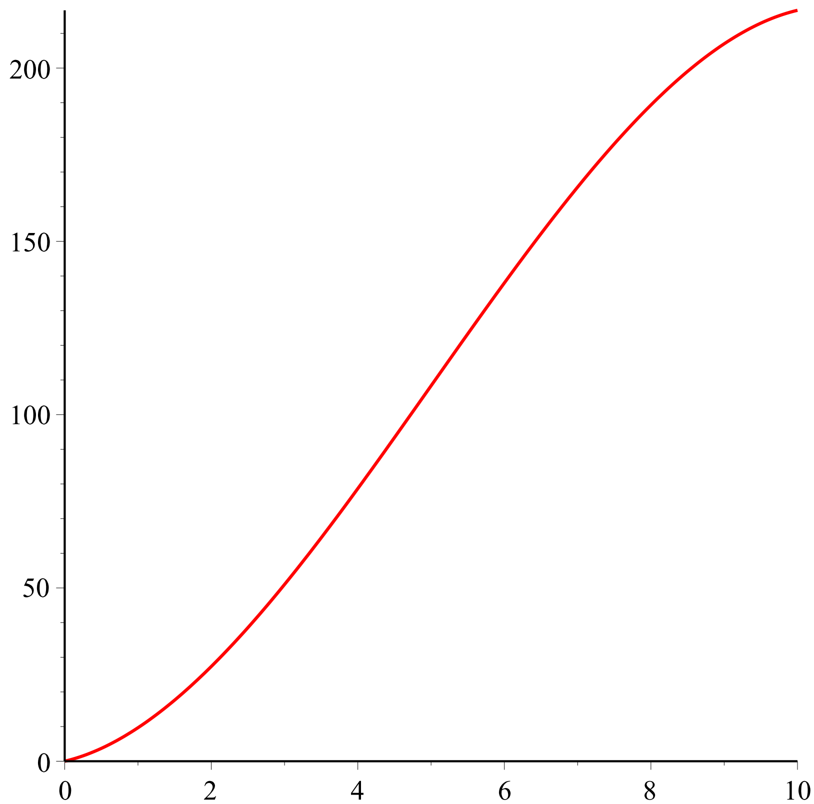
$$\{t < 5\} \quad \textbf{(13)}$$

in [0,5[ s'' è positiva quindi la funzione volge la concavità verso l'alto, in ]5,10] s'' è negativa quindi la funzione volge la concavità verso il basso in t=5 c'è un punto di flesso la cui ordinata è

$sF = \left(t = 5, -\frac{1}{3} \cdot t^3 + 5 \cdot t^2 + 5 \cdot t\right)$

$$sF = \frac{325}{3} \quad \textbf{(14)}$$

**Disegnamola**

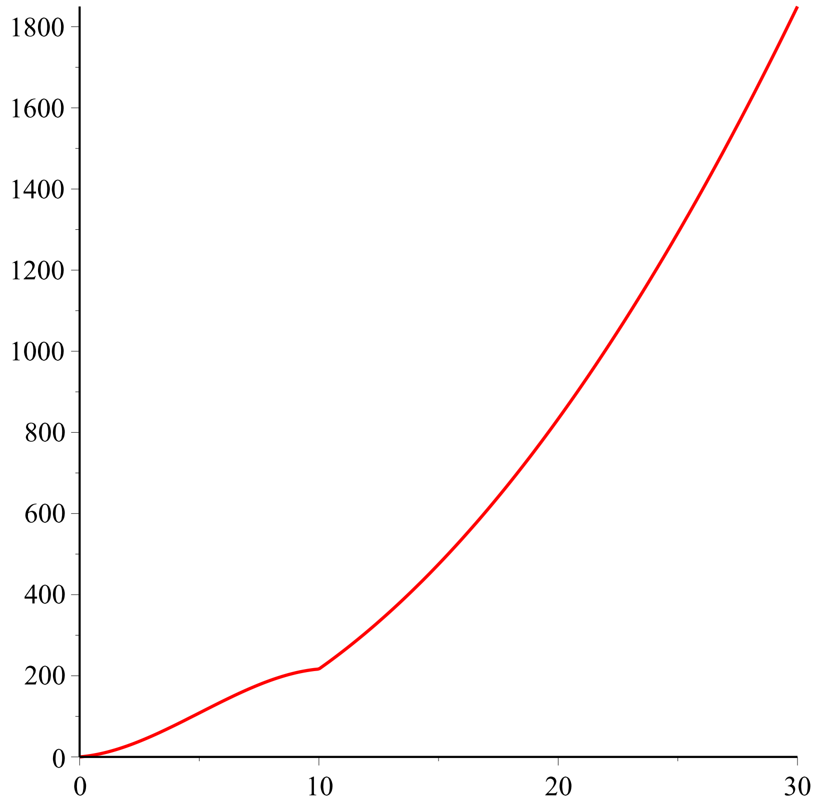



Per la funzione $s2(t) = 2 \cdot t^2 + \frac{5}{3} \cdot t$ in ]10,30] non è necessario eseguire uno studio di funzione poichè si tratta di un arco di parabola (con asse parallelo all'asse s) con concavità verso l'alto passante per il punto I sopra determinato e G (30,1850).

$s = \left(t = 30,\ 2 \cdot t^2 + \frac{5}{3} \cdot t\right)$

$$s = 1850 \quad \textbf{(15)}$$

La legge oraria del primo meteorite ha quindi grafico:




Si osserva in particolare che la suddetta funzione è continua in [0,30], come già verificato sopra.
La derivata prima di h(t) è:

$$h'(t) = \begin{cases} -t^2 + 10\,t + 5 & 0 \le t < 10 \\ 4 \cdot t + \dfrac{5}{3} & 10 < \mathrm{t} \le 30 \end{cases}$$

In t=10 vi è un punto di non derivabilità (punto angoloso) poichè le derivate destra e sinistra sono diverse e finite.

$$\lim_{t \to 10^-} \left(-t^2 + 10 \cdot t + 5\right)$$

$$5 \tag{16}$$

$$\lim_{t \to 10^+} \left(4 \cdot t + \frac{5}{3}\right)$$

$$\frac{125}{3} \tag{17}$$

altrove la funzione è derivabile.