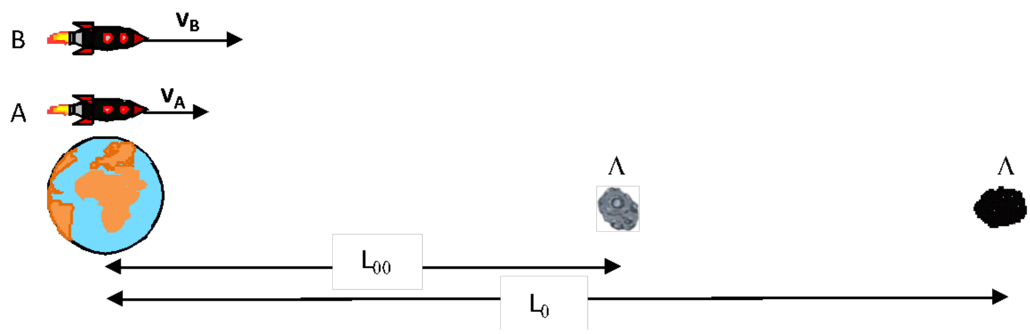
Viaggio relativistico verso due asteroidi

Due asteroidi, denominati α e β, sono stati individuati a distanza $L_{0\alpha}$= 4 ore luce (pari a 4,317 10^{12} m) e $L_{0\beta}$= 7,5 ore luce (pari a 8,094 10^{12} m) rispetto alla Terra. I due asteroidi sono allineati con la terra e la loro velocità rispetto alla terra è trascurabile. Due astronavi, A e B, partono nello stesso istante verso i due asteroidi per un volo di ricognizione. L'astronave A ha il compito di sorvolare l'asteroide α mentre l'astronave B ha il compito di sorvolare l'asteroide β.
Le due astronavi viaggiano a velocità relativistiche con moto rettilineo uniforme. L'astronave B, che deve percorrere una distanza maggiore, utilizza dei propulsori più potenti e viaggia ad una velocità maggiore di quella dell'astronave A.

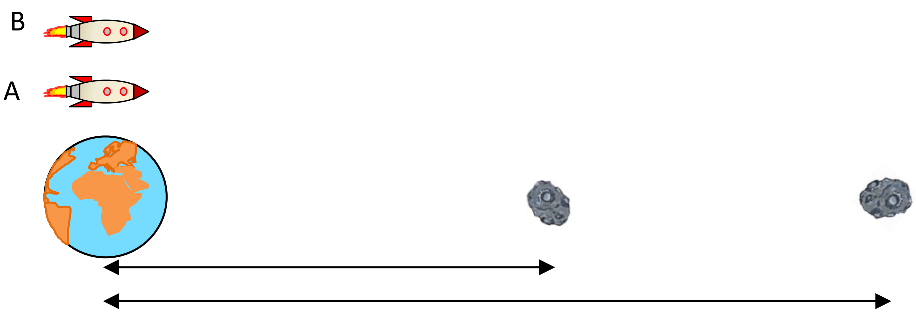
Riferimento della Terra



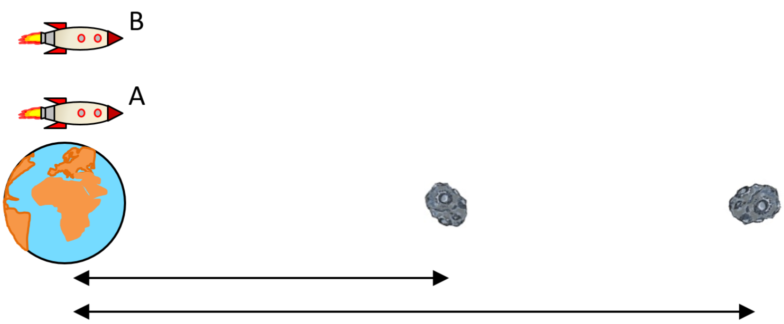
La figura rappresenta la situazione all'istante iniziale t=0 s nel sistema di riferimento della terra.

A. Le due figure seguenti illustrano la situazione all'istante t=0 s nei sistemi di riferimento dell'astronave A e dell'astronave B. Completa le due figure disegnando su ciascun oggetto un vettore che rappresenti la sua velocità nel sistema di riferimento in esame. Associa a ciascuna distanza la relazione che permette di calcolarla. Spiega cosa cambia nei due riferimento A e B rispetto al riferimento della Terra.

Riferimento dell'astronave A



Riferimento dell'astronave B



Il comandante della missione decide di premiare con una promozione l'astronauta che per primo raggiungerà l'asteroide che gli è stato assegnato. I due astronauti si accordano di inviare all'altro il tempo di arrivo sull'asteroide obiettivo della propria missione.

B. Quando l'astronave A raggiunge l'asteroide α il suo orologio di bordo indica un tempo t'_{α} = 9h 9min 54s (pari a $3{,}299\ 10^4$ s) e quando l'astronave B raggiunge l'asteroide β, il suo orologio di bordo indica anch'esso il tempo t''_{β}= 9h 9min 54s (pari a $3{,}299\ 10^4$ s). Determina la velocità dell'astronave A e quella dell'astronave B (in unità c) rispetto alla terra. Determina anche la velocità relativa tra le due astronavi.

Quando l'astronauta A riceve l'informazione sul tempo di arrivo di B sull'asteroide β, stappa una bottiglia di champagne ritenendo di aver diritto alla promozione.

C. Utilizzando le trasformazioni di Lorentz o le relazioni tra gli intervalli di tempo misurati in sistemi di riferimento diversi determina il tempo t'_{B} di arrivo di B sull'asteroide β come determinato da A e verifica che effettivamente egli giustamente ritiene di aver diritto alla promozione.

Quando l'astronauta B riceve l'informazione sul tempo di arrivo di A sull'asteroide α, invita tutto l'equipaggio al bar per un brindisi: anche egli ritiene infatti di aver diritto alla promozione.

A. Utilizzando le trasformazioni di Lorentz o le relazioni tra gli intervalli di tempo misurati in sistemi di riferimento diversi determina il tempo t''_{A} di arrivo di A sull'asteroide α come determinato da B e verifica che effettivamente anche egli giustamente ritiene di aver diritto alla promozione.

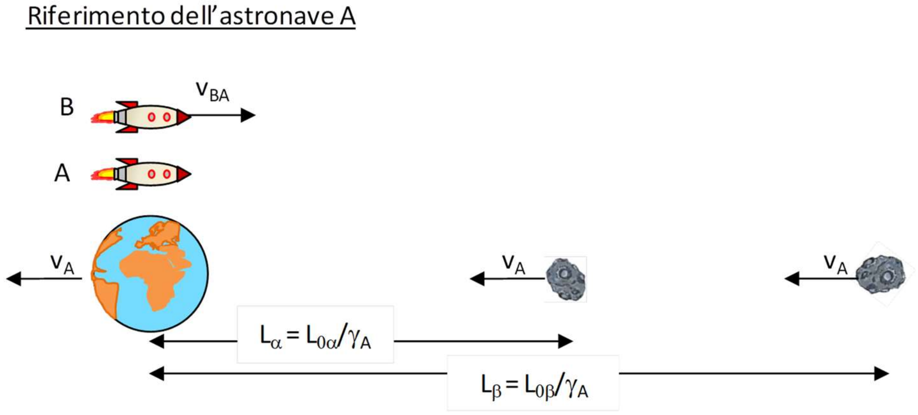
Tornati sulla terra entrambi gli astronauti vanno dal capitano a reclamare la promozione; l'astronauta A sostiene infatti che l'evento *"l'astronave A raggiunge l'asteroide α"* si è verificato prima dell'evento *"l'astronave B raggiunge l'asteroide β".* L'astronauta B sostiene invece il contrario.

Il capitano è in grande imbarazzo, ma, dopo un primo momento di stordimento, consultato un testo di relatività, si scusa con i due astronauti e li promuove entrambi: ha capito infatti che si è verificata una inversione temporale tra due eventi visti da osservatori diversi, da lui non prevista.
Spiega se questa inversione temporale è possibile, in quali condizioni si può verificare e se, nel caso in esame, è questa la spiegazione del contenzioso tra i due astronauti.

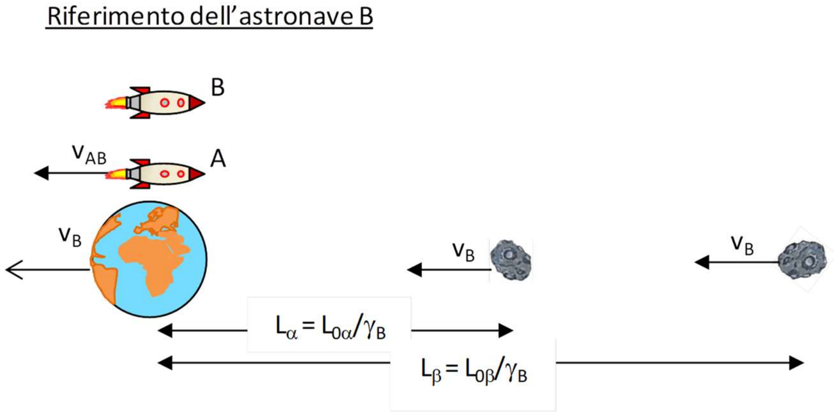
Soluzione

Punto 1

L’astronauta A vede se stesso fermo mentre la Terra e i due asteroidi gli vanno incontro con velocità v_A. Lo stesso astronauta A vede l’astronave B muoversi in avanti con una velocità relativa v_{BA}.
Inoltre nel sistema di riferimento dell’astronauta A, tutte le distanze parallele al moto sono contratte di un fattore $\gamma_A = 1/\sqrt{1-(v_A/c)^2}$, il cui valore dipende da quello della velocità v_A.
Sulla base di queste considerazioni, la situazione all’istante t=0s nel sistema si riferimento dell’astronauta A può essere rappresentata come segue:



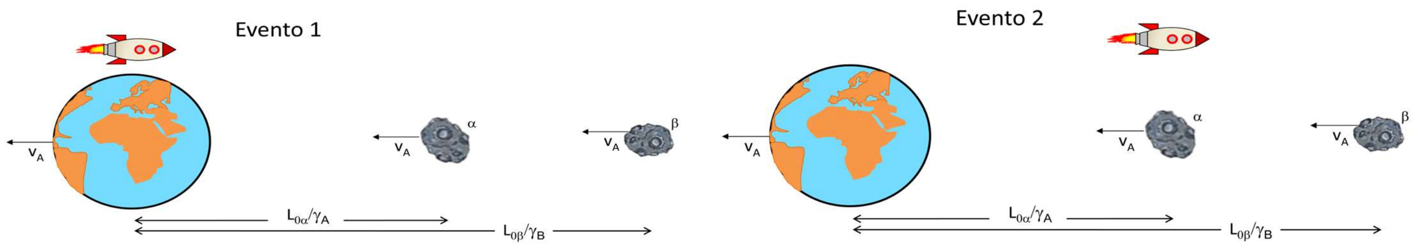
L’astronauta B vede se stesso fermo mentre la Terra e i due asteroidi gli vanno incontro con velocità v_B. Lo stesso astronauta B vede l’astronave A muoversi nello stesso verso della terra e degli asteroidi con una velocità relativa v_{AB}, il cui modulo è lo stesso di v_{BA}.
Inoltre nel sistema di riferimento dell’astronauta B, tutte le distanze parallele al moto sono contratte di un fattore $\gamma_B = 1/\sqrt{1-(v_B/c)^2}$, il cui valore dipende da quello della velocità v_B. Questa velocità è maggiore di v_A e quindi anche γ_B è maggiore di γ_A.
Sulla base di queste considerazioni, la situazione all’istante t=0s nel sistema si riferimento dell’astronauta B può essere rappresentata come segue:



Nei due diversi sistemi di riferimento A e B cambiano, rispetto al rifermento della terra, non solo le velocità relative dei vari oggetti e le loro distanze, ma anche la velocità con cui fluisce il tempo e quindi l’intervallo di tempo tra due eventi.

Nel riferimento dell'astronave A, l'intervallo di tempo che essa impiega per raggiungere l'asteroide α, corrisponde all'intervallo tra i seguenti eventi:

E_1: L'astronave A sorvola la terra all'istante t_1
E_2: L'astronave A sorvola l'asteroide α all'istante t_2



Per l'osservatore A questi due eventi si verificano nella stessa posizione (sotto l'astronave), pertanto l'intervallo temporale tra questi due eventi, $\Delta t_0 = t_2 - t_1$, è un ***tempo proprio***. Per un osservatore sulla terra, gli stessi eventi si verificano in posizioni diverse e l'intervallo temporale tra gli stessi eventi appare dilatato di un fattore γ_A , il cui valore dipende dalla velocità dell'astronave.
Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per il riferimento dell'astronave B.
Nel riferimento dell'astronave B, l'intervallo di tempo che essa impiega per raggiungere l'asteroide β, corrisponde all'intervallo tra i seguenti eventi:

E_1: L'astronave B sorvola la terra all'istante t_1
E_2: L'astronave B sorvola l'asteroide β all'istante t_2

Per l'osservatore B questi due eventi si verificano nella stessa posizione (sotto l'astronave), pertanto l'intervallo temporale tra questi due eventi, $\Delta t_0 = t_2 - t_1$, è un ***tempo proprio***. Per un osservatore sulla terra, gli stessi eventi si verificano in posizioni diverse e l'intervallo temporale tra gli stessi eventi appare dilatato di un fattore γ_B , il cui valore dipende dalla velocità dell'astronave.

Punto 2

Poiché le distanze sono espresse in ore-luce (hc), esprimiamo i tempi in ore. Il tempo indicato dall'orologio a bordo delle due astronavi nell'istante in cui ciascuna di esse raggiunge il proprio obiettivo è:

$$t'_\alpha = t'_\beta = 9h\, 9\,\text{min}\, 54s = 9h + 9min/(60min/h) + 54s/(3600s/h) = \ 9{,}1650h$$

L' astronauta A vede avvicinarsi l'asteroide α che percorre la distanza L_α in un intervallo di tempo pari a t'_α. La velocità v_A dell'asteroide è:

$$v_A = \frac{L_\alpha}{t'_\alpha} = \frac{L_{o\alpha}\sqrt{1-(v_A/c)^2}}{t'_\alpha}$$

Dopo qualche passaggio si ottiene:

$$v_A = \sqrt{\frac{(L_{o\alpha}c)^2}{(L_{o\alpha})^2 + (ct'_\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{(4\,hc^2)^2}{(4\,hc)^2 + (9{,}1650\,hc)^2}} = 0{,}4c$$

Questa è anche la velocità dell'astronave A rispetto alla terra.
L' astronauta B vede avvicinarsi l'asteroide β che percorre la distanza L_β in un intervallo di tempo pari a t'_β. La velocità v_B dell'asteroide è:

$$v_B = \frac{L_\beta}{t'_\beta} = \frac{L_{o\beta}\sqrt{1-(v_B/c)^2}}{t'_\beta}$$

Dopo qualche passaggio si ottiene:

$$v_A = \sqrt{\frac{(L_{o\beta}c)^2}{(L_{o\beta})^2 + (ct'_\beta)^2}} = \sqrt{\frac{(7{,}5\,hc^2)^2}{(7{,}5\,hc)^2 + (9{,}1650\,hc)^2}} = 0{,}6333c$$

Questa è anche la velocità dell'astronave B rispetto alla terra.
Per calcolare la velocità di B rispetto ad A, occorre utilizzare la relazione relativistica per la composizione delle velocità, pertanto:

$$v_{BA} = \frac{v_B - v_A}{1 - \frac{v_B v_A}{c^2}} = \frac{0{,}6333c - 0{,}4c}{1 - \frac{0{,}6333c \cdot 0{,}4c}{c^2}} = 0{,}31245c$$

Questa è anche la velocità dell'astronave A rispetto a B.

<u>Punto 3</u>

Indichiamo con t'_β il tempo misurato dall'orologio di B quando raggiunge l'asteroide β e con $t'_{\beta A}$ lo stesso tempo misurato dall'orologio di A.
Nel riferimento di B il tempo t'_β è un ***tempo proprio*** in quanto misura l'intervallo tra due eventi che si verificano nello stesso luogo. I due eventi sono:

E_1 = passaggio della terra <u>sotto l'astronave B</u>
E_2 = passaggio dell'asteroide β <u>sotto l'astronave B</u>

Nel riferimento di A, gli stessi eventi avvengono in luoghi diversi, pertanto l'intervallo di tempo tra essi risulta dilatato rispetto al tempo proprio t'_β

$$t'_{\beta A} = \frac{t'_\beta}{\sqrt{1 - \frac{v_{BA}^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1650\,h}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}31245\,c)^2}{c^2}}} = 9{,}648\,h$$

poiché risulta $t'_{\beta A} > t'_\alpha$, l' astronauta A ritiene giustamente di aver vinto la gara.

Punto 4

Nel riferimento A la situazione è simmetrica. Indichiamo con t'_α il tempo misurato dall'orologio di A quando raggiunge l'asteroide α e con $t'_{\alpha B}$ lo stesso tempo misurato dall'orologio di B.
Nel riferimento di A il tempo t'_α è un ***tempo proprio*** in quanto misura l'intervallo tra due eventi che si verificano nello stesso luogo. I due eventi sono:

E_1 = passaggio della terra <u>sotto l'astronave A</u>
E_2 = passaggio dell'asteroide α <u>sotto l'astronave A</u>

Nel riferimento di B, gli stessi eventi avvengono in luoghi diversi, pertanto l'intervallo di tempo tra essi risulta dilatato rispetto al tempo proprio t'_α

$$t'_{\alpha B} = \frac{t'_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v_{AB}^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1650\ h}{\sqrt{1-\frac{(0{,}31245\ c)^2}{c^2}}} = 9{,}648\ h$$

Poiché risulta $t'_{\alpha B} > t'_\beta$, l' astronauta B ritiene giustamente di aver vinto la gara.

Punto 5

Consideriamo i seguenti eventi:

Evento 1 - *L'astronave A raggiunge l'asteroide α.*
Evento 2 - *L'astronave B raggiunge l'asteroide β.*

Siano (t_1,x_1) e (t_2,x_2) le coordinate dei due eventi nel sistema di riferimento dell'astronave A.
Siano (t'_1,x'_1) e (t'_2,x'_2) le coordinate degli stessi eventi nel sistema di riferimento dell'astronave B in moto con velocità v rispetto al riferimento A. Siano inoltre

$$\Delta t = t_2 - t_1 > 0 \qquad e \qquad \Delta x = x_2 - x_1 > 0$$

Indichiamo con $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ l'intervallo di tempo tra i due eventi nel sistema di riferimento B.
La relazione tra gli intervalli Δt′ e Δt è data dalla trasformazione di Lorentz

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

Affinché nel riferimento di B si verifichi una inversione temporale tra i due eventi, deve risultare

$$\Delta t' < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x < 0 \qquad \Rightarrow \qquad c\Delta t < \frac{v}{c}\Delta x$$

Essendo v/c<1 si ha, a maggior ragione

$$c\Delta t < \Delta x$$

Se questa disuguaglianza è soddisfatta allora i due eventi sono temporalmente invertiti nel riferimento B ma, nel contempo, questo implica che i due eventi non possono essere causalmente correlati.
Perché tra due eventi possa esistere una relazione di causa ed effetto è necessario che un segnale emesso in corrispondenza dell'evento 1 percorra la distanza Δx e giunga nella posizione in cui si verifica l'evento 2 prima che questo si sia verificato. Solo così potrà influenzarne l'evoluzione.
Il segnale più veloce che può essere emesso è un segnale luminoso che, viaggiando a velocità c, percorre una distanza cΔt nell'intervallo che intercorre tra i due eventi. Nel caso in cui sia valida la precedente disuguaglianza, il segnale luminoso non riesce a raggiunge la posizione dell'evento 2 prima che questo si sia verificato. L'evento 2 non può essere influenzato dall'evento1 e quindi tra i due eventi non può esistere una relazione di causa ed effetto.
Quando questo accade, l'invariate relativistico

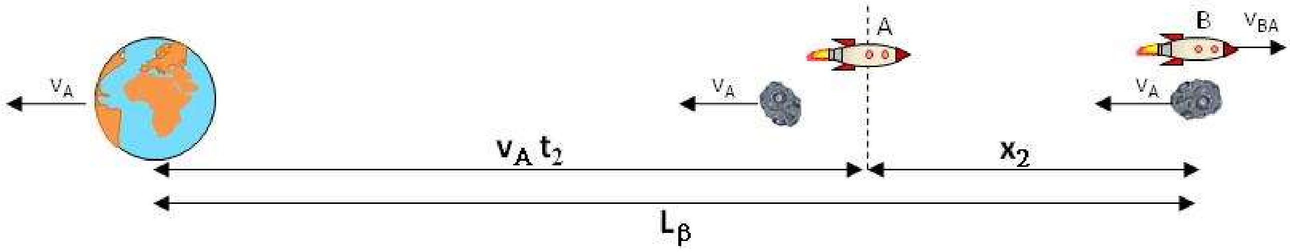
$$\sigma^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

risulta negativo.
La teoria delle relatività, pur prevedendo la possibilità di una inversione temporale tra due eventi visti da osservatori diversi, stabilisce che nessuna inversione è possibile tra due eventi legati da una relazione di causa ed effetto.

Esaminiamo ora quantitativamente il caso proposto dal problema.
Calcoliamo le coordinate (t_1,x_1) e (t_2,x_2) dei due eventi nel riferimento A:

$$\begin{aligned} t_1 &= 9{,}165\ h \\ t_2 &= 9{,}648\ h \\ x_1 &= 0\ hc \\ x_2 &= L_\beta - v_A\, t_2 \end{aligned}$$

L'ultima relazione si comprende meglio se si fa riferimento alla figura seguente, che illustra la situazione vista dall'astronave A all'istante t_2.



Tenendo conto che nell'intervallo tra t_1 e t_2 l'astronauta A vede avvicinarsi l'asteroide β con velocità v_A, si ha:

$$x_2 = L_{0\beta}\sqrt{1 - v_A^2/c^2} - v_A\, t_2 = 7{,}5\ hc\ \sqrt{1 - (0{,}4c)^2/c^2} - 0{,}4c \cdot 9{,}648\ h = 3{,}015\ hc$$

Ne risulta

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 = 0{,}483\ h \\ \Delta x &= x_2 - x_1 = 3{,}015\ hc \end{aligned}$$

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}31245\ c)^2}{c^2}}}\left(0{,}483h - \frac{0{,}31245\ c}{c^2} 3{,}015\ hc\right) = -0{,}483\ h$$

Il valore negativo di Δt' indica che nel riferimento dell'astronave B si ha inversione temporale tra gli eventi E_1 ed E_2 .
Se calcoliamo il valore dell'invariante relativistico nel riferimento dell'astronave A si ha:

$$(c\Delta t)^2 = (c \cdot 0{,}483\ \mathrm{h})^2 = 0{,}233\ h^2 c^2$$

$$\Delta x^2 = (3{,}015\ \mathrm{hc})^2 = 9{,}090\ h^2 c^2$$

$$\sigma^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 = 0{,}233\ h^2 c^2 - 9{,}090\ h^2 c^2 < 0$$

Questo risultato sta ad indicare che i due eventi, il cui ordine temporale è invertito nei due diversi riferimenti inerziali, non possono essere legati da una relazione di causa ed effetto.
L'effetto deve sempre seguire la causa e questo ordine temporale non può essere invertito.