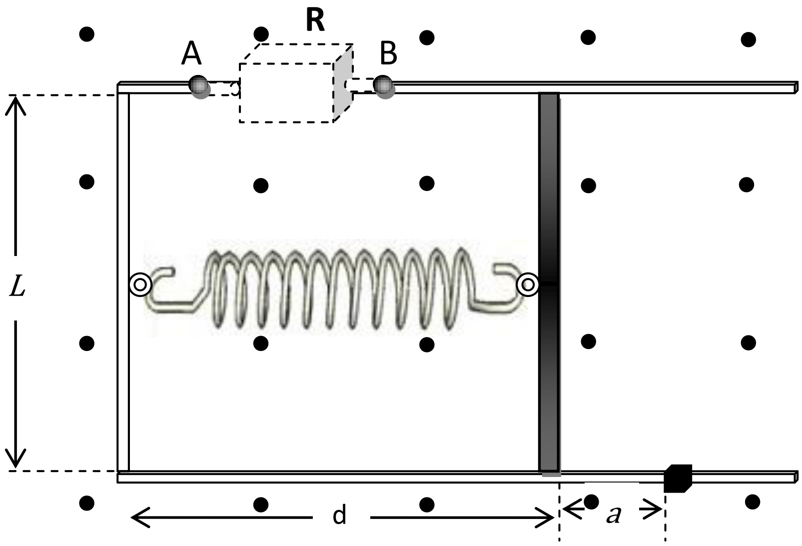
Un generatore "ideale"

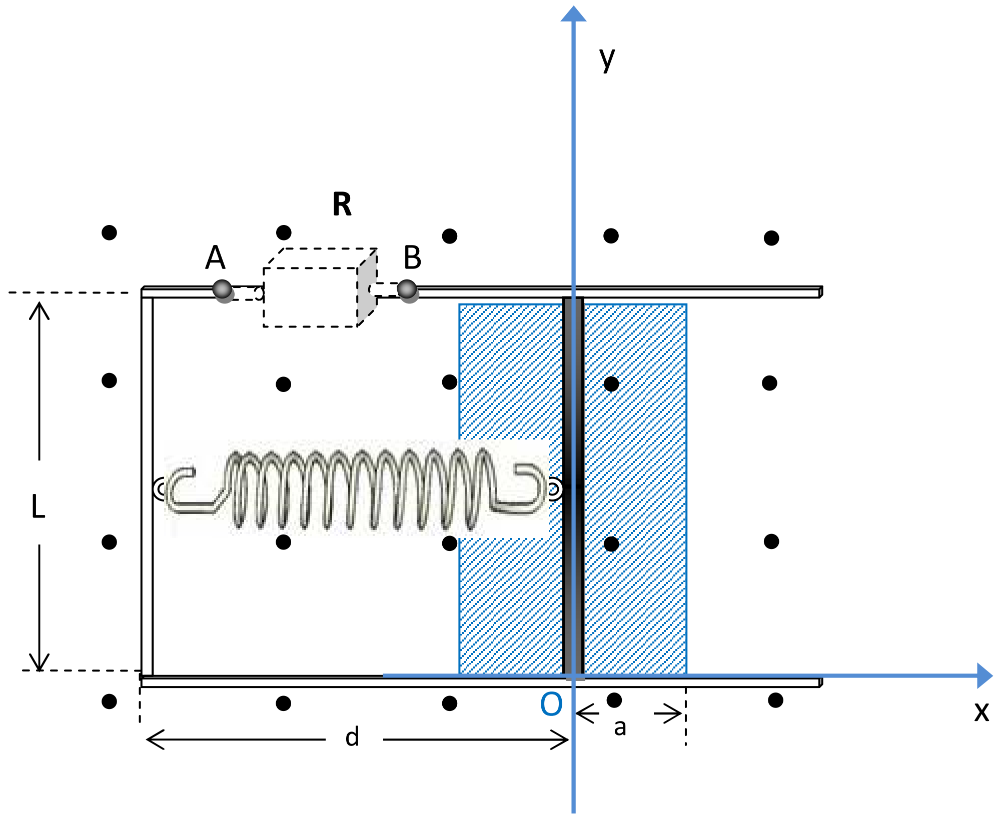
Il tuo amico Luigi pensa di aver avuto un'idea geniale: ha progettato un generatore di tensione alternata che, una volta avviato, non necessita di ulteriore apporto di energia per il suo funzionamento se non quel poco che serve a vincere gli esegui attriti del dispositivo. Ti mostra la rappresentazione schematica sotto raffigurata descrivendola così:



Una barretta metallica, di massa *m*, può scorrere lungo i due binari paralleli di una guida ad U anch'essa metallica. La barretta, di lunghezza *L,* è collegata al lato della guida parallelo ad essa mediante una molla fissata con materiale isolante. Il tutto è immerso in un campo magnetico uniforme e costante $\vec{\mathbf{B}}$, ortogonale al piano della guida.
La barretta viene spostata di un tratto *a* e poi bloccata in modo da mantenere la molla allungata. Una volta tolto il blocco la barretta inizierà ad oscillare generando tra i poli A e B una differenza di potenziale alternata che potrebbe essere utilizzata, ad esempio collegando ai poli una resistenza R, fin quando la barretta si muove.
Volendo presentare la sua idea in un concorso scolastico, Luigi chiede a te di:

1. preparare una descrizione qualitativa e quantitativa del fenomeno fisico che determina la differenza di potenziale tra i poli A e B, e calcolando il valore della costante elastica della molla che consente di produrre una tensione di frequenza pari a quella della rete domestica di 50,0 Hz, nell'ipotesi che la massa *m* abbia il valore $2{,}0 \cdot 10^{-2}$ kg.
2. valutare il valore massimo f_{max} della forza elettromotrice indotta $f_{e.m.}$ che tale generatore produce nel caso a=$1{,}0 \cdot 10^{-2}$ m, L=$1{,}0 \cdot 10^{-1}$m, B=0,30 T.
Tu non sei convinto che il generatore ideato da Luigi una volta avviato possa fornire per sempre energia elettrica ad una utenza, senza ulteriore apporto di energia; per capire meglio cerchi di ottenere energia dal generatore e colleghi la resistenza elettrica *R*, come mostrato in figura, tra i poli A e B, misuri la differenza di potenziale tra i poli in funzione del tempo e ne tracci un grafico.
3. Che tipo di grafico ottieni?
4. Che tipo di moto ha la barretta e perché?
5. Come spiegheresti a Luigi cosa avviene dal punto di vista energetico e perché la sua idea non è poi così geniale come lui immagina?

Soluzione



Prima di collegare la resistenza R tra i due poli A e B, nel circuito non circola corrente; la barretta è soggetta alla sola forza elastica e quindi si muove di moto armonico; indicando con x la posizione della barretta, il moto è descritto dall'equazione:

$$\mathbf{x} = a\cos(2\pi\ \mathbf{f}\ \mathbf{t})$$

con *a* ampiezza del moto; la frequenza del moto armonico è data dall'espressione:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dovendo essere f = 50 Hz, si ottiene per k:

$$\mathbf{k} = 4\pi^2\mathbf{f}^2\mathbf{m} = 4\cdot\pi^2\cdot 50^2\cdot 20\cdot 10^{-3} = 1{,}97\cdot 10^3\ \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m}}$$

Per la presenza del campo magnetico, il moto della barretta genera una forza elettromotrice indotta pari al flusso del campo B tagliato nell'unità di tempo dalla barretta stessa; esso è anche eguale alla variazione di flusso attraverso la superficie delimitata dalla guida e dalla barretta. Assumendo il campo magnetico uscente dal foglio del disegno (asse +z), il flusso Φ del campo B attraverso la superficie delimitata dalla guida e dalla barretta è:

$$\Phi = B \cdot L \cdot (d + x) = B \cdot L \cdot (d + a\cos(2\pi\ f\ t))$$

Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz la forza elettromotrice indotta $f_{em.}$ sarà:

$$f_{em.} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \cdot L \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot L \cdot 2\pi \cdot f \cdot a \cdot \sin(2\pi\ f\ t)$$

Il valore massimo f_{max} si ottiene quando la funzione seno assume il valore 1 e varrà:

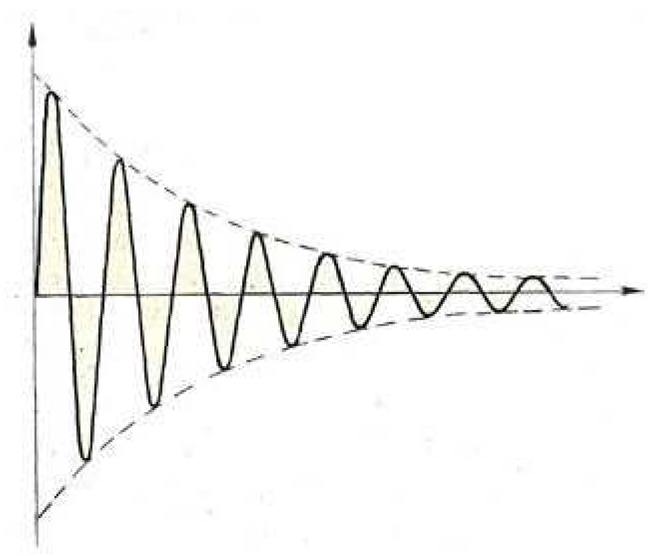
$$f_{max} = B \cdot L \cdot 2\pi\ f \cdot a = 94{,}2\ mV$$

Collegando la resistenza R, nel circuito scorre la corrente indotta:

$$i = \frac{f_{em.}}{R}$$

La barretta subisce quindi l'azione di una forza magnetica data dall'espressione $\vec{F} = i\,\vec{L} \times \vec{B}$ il cui effetto è quello di una forza frenante in quanto il verso è opposto a quello della velocità istantanea; infatti nell'ipotesi fatta per il verso di B (lungo +z), quando v è >0 la forza elettromotrice farà circolare la corrente in senso orario; la corrente nella sbarretta sarà lungo –y e quindi la forza F lungo – x, cioè in verso opposto alla velocità; poiché il modulo della forza F è proporzionale alla velocità, si tratta di una forza di resistenza viscosa.

La barretta si muove quindi sotto l'azione della risultante di una forza elastica e di una forza di resistenza viscosa e il moto risultante è un moto armonico smorzato. La differenza di potenziale tra i terminali A e B è proporzionale alla velocità v = dx/dt e ha un andamento temporale analogo a questa, come mostrato in figura.



Dal punto di vista energetico la forza F agente sulla barretta fa un lavoro negativo, essendo opposta alla velocità; di conseguenza l'energia cinetica della barretta diminuisce nel tempo e così anche la velocità; di conseguenza diminuisce anche la forza elettromotrice indotta e quindi la corrente indotta: a tempi lunghi la barretta si ferma e la forza elettromotrice indotta si annulla.

Quantitativamente il lavoro fatto dalla forza F nell'unità di tempo (potenza) è eguale alla potenza dissipata per effetto joule dalla corrente indotta nella resistenza R.

Infatti la potenza dissipata dalla forza F risulta:

$$|\mathbf{w}| = |\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}| = \mathbf{iLBv}$$

E la potenza dissipata nella resistenza R:

$$|\mathbf{w}| = \mathbf{i} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{em.}} = \mathbf{iLBv}$$

Quindi il generatore di Luigi non funziona in modo ideale per la produzione di corrente alternata, ma si limita a dissipare per effetto joule l'energia inizialmente fornita alla barretta: non c'è quindi alcuna violazione del principio di conservazione dell'energia.