

Hai sentito parlare dell'effetto Mössbauer e incuriosito hai trovato su un sito la seguente descrizione del fenomeno:

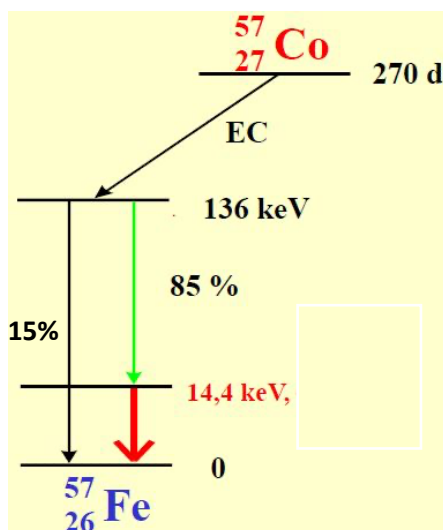
“Un nucleo con Z protoni e N neutroni che si trova in uno stato eccitato di energia E_e , effettua una transizione allo stato fondamentale di energia E_g emettendo un fotone di energia $E_e - E_g$.

Questo fotone può essere assorbito da un nucleo dello stesso tipo (cioè con gli stessi valori di Z ed N) che si trova nello stato fondamentale causando una transizione allo stato eccitato di energia E_e ; questo fenomeno è chiamato assorbimento per risonanza e avviene in quanto l'energia del fotone emesso dal primo nucleo è uguale alla differenza di energia tra il livello fondamentale e il livello eccitato del secondo nucleo.

Su alcuni nuclei, come ad esempio il $^{57}_{26}\text{Fe}$, quando l'atomo si trova allo stato gassoso ed è quindi libero di muoversi il fenomeno di assorbimento per risonanza non si manifesta mentre si manifesta quando l'atomo è in un blocco di ferro; questo fenomeno è noto come effetto Mössbauer”.

Su di un altro sito hai trovato queste ulteriori informazioni:

“L'isotopo $^{57}_{27}\text{Co}$ è instabile e decade per cattura elettronica¹ in $^{57}_{26}\text{Fe}$ con una vita media di 270 giorni; nel decadimento viene popolato il livello nucleare eccitato del nucleo di $^{57}_{26}\text{Fe}$ corrispondente ad una energia di 136 keV. Questo stato eccitato decade dopo circa 10 ns e popola con una probabilità dell'85% lo stato eccitato di energia più bassa e con una probabilità del 15% lo stato fondamentale. Entrambi i fotoni emessi nei due casi possono essere utilizzati per studiare l'effetto Mössbauer del $^{57}_{26}\text{Fe}$. La situazione è rappresentata nel seguente schema di livelli energetici.



1. Servendoti delle informazioni reperite sui due siti, descrivi cosa dovrebbe avvenire nel caso del $^{57}_{26}\text{Fe}$, tenendo conto dei livelli energetici del nucleo e dell'energia del fotone

¹ La cattura elettronica è il processo in cui il nucleo di un atomo assorbe uno degli elettroni orbitanti, trasforma un protone del nucleo in un neutrone ed emette un neutrino elettronico. Per effetto della cattura elettronica il nucleo si trasforma in un altro nucleo con lo stesso numero di massa ma con numero atomico diminuito di una unità.

emesso, supponendo che il nucleo sia fermo sia prima sia dopo il decadimento. Dalla sola conoscenza dei livelli energetici di partenza e di arrivo, calcola l'energia e la lunghezza d'onda del fotone emesso nelle due transizioni allo stato fondamentale, precisando a quale banda dello spettro elettromagnetico i fotoni appartengono

2. In realtà, quando il nucleo emette il fotone, subisce un rinculo come un fucile che spara un proiettile. Per effetto del rinculo una parte dell'energia del decadimento viene trasformata in energia cinetica del nucleo e l'energia del fotone emesso diminuisce rispetto al caso in cui supponi che il nucleo sia fermo e che quindi non rinculi.

Dimostra che a causa del rinculo, dopo l'emissione di un fotone di energia E_f il nucleo possiede una energia cinetica pari a

$$E_R = \frac{E_f^2}{2mc^2}$$

dove m è la massa del nucleo e c la velocità della luce e calcolane i valori per i due decadimenti considerati verso lo stato fondamentale.

3. Considera la transizione dallo stato eccitato di energia più bassa allo stato fondamentale e deduci dalla vita media dello stato eccitato, pari a circa 100 ns, l'incertezza ΔE con cui è nota l'energia del fotone emesso.

4. Sulla base dei valori di E_R e ΔE ottenuti per la transizione dallo stato eccitato a energia più bassa spiega per quale motivo quando il nucleo di ferro è in fase gassosa non si osserva la risonanza.

Gli studiosi rimasero molto stupiti nell'osservare la risonanza quando l'atomo si trova in un blocco di ferro. Prova a fornire una giustificazione del perché in questo caso la risonanza si osserva, fornendo se necessario anche un esempio quantitativo.

Assumi per l'unità di massa atomica il valore $1,67 \times 10^{-27}$ kg e per la carica elementare $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C.

Soluzione

1. Il nucleo decade dallo stato eccitato emettendo un singolo fotone; la conservazione dell'energia permette il calcolo della frequenza e lunghezza d'onda del fotone emesso utilizzando la relazione: $E_{\text{ecc}} - E_g = h\nu$ dove $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ è la costante di Planck.

Per $E_{\text{ecc}} = 14,4 \text{ keV}$ otteniamo $\nu_1 = 3,48 \times 10^{18} \text{ Hz}$ e $\lambda_1 = c/\nu_1 = 8,61 \times 10^{-11} \text{ m}$ ($c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ è la velocità della luce) e per $E_{\text{ecc}} = 136 \text{ keV}$ $\nu_2 = 3,29 \times 10^{19} \text{ Hz}$, $\lambda_2 = 9.12 \times 10^{-12} \text{ m}$. Entrambi i fotoni appartengono all'ambito delle radiazioni gamma.

2. Nel decadimento, oltre all'energia, si conserva anche la quantità di moto; poiché la quantità di moto totale iniziale è nulla, deve essere nulla anche dopo il decadimento e quindi il nucleo acquista una quantità di moto uguale e contraria a quella del fotone. Poiché un fotone di lunghezza d'onda λ possiede una quantità di moto $p = h/\lambda$ che è uguale alla sua energia divisa per la velocità c della luce $p = E_f/c$, avremo quindi per l'energia di rinculo del nucleo (m è la massa del nucleo)

$$E_R = \frac{(p_{\text{nucleo}})^2}{2m} = \frac{p_{\text{fotone}}^2}{2m} = \frac{(E_f)^2}{2mc^2}.$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo per

$$E_{\text{ecc}} = 14,4 \text{ keV} \quad E_R = 3,11 \times 10^{-22} \text{ J} = 1,94 \times 10^{-3} \text{ eV} \quad \text{e per}$$

$$E_{\text{ecc}} = 136 \text{ keV} \quad E_R = 2,77 \times 10^{-20} \text{ J} = 1,73 \times 10^{-1} \text{ eV}.$$

3. Dal principio di indeterminazione di Heisenberg: $\tau \cdot \Delta E \approx h$ (ove $\tau = 100 \text{ ns}$ è la vita media dello stato e ΔE l'incertezza sull'energia) otteniamo $\Delta E \approx 6,6 \times 10^{-27} \text{ J} = 4,1 \times 10^{-8} \text{ eV}$. (sono qui trascurati altri fattori che possono causare l'allargamento della riga spettrale)
4. Quando è in fase gassosa e quindi libero di rinculare, il nucleo di ferro acquista una energia cinetica pari a otteniamo $E_R = 3,11 \times 10^{-22} \text{ J} = 1,94 \times 10^{-3} \text{ eV}$. La conservazione dell'energia per il processo richiede che sia

$$E_{\text{ecc}} - E_g = E_f + E_R$$

e quindi l'energia del fotone emesso è in realtà pari a $E_f = (E_{\text{ecc}} - E_g) - E_R$, e quindi minore dell'energia necessaria per l'assorbimento. Questa diminuzione è ben maggiore della larghezza della riga ΔE (per un fattore $E_R / \Delta E = 1,94 \times 10^{-3} \text{ eV} / 4,1 \times 10^{-8} \text{ eV} \approx 5 \times 10^4$) e quindi il fotone emesso non può essere riassorbito quando il nucleo si trova in fase gassosa. Quando il nucleo si trova in un blocco di ferro la massa che assorbe il rinculo è tutta la massa del blocco. E' sufficiente un numero di $\approx 5 \times 10^4$ atomi di ferro per rendere comparabile i due fattori e permettere l'assorbimento per risonanza.