Le righe di Pickering

Nel 1896 l'astronomo Edward Charles Pickering, analizzando lo spettro di emissione della stella Zeta Puppis, scoprì la presenza di alcune righe con lunghezza d'onda uguale a quella prevista dalla serie di Balmer e per questo da lui attribuite alla presenza di idrogeno nella stella. Scoprì inoltre la presenza di altre tre righe spettrali, chiamate righe di Pickering, di lunghezza d'onda 1 rispettivamente pari a

455,1 nm   541,1 nm   e   1012,3 nm

1. Utilizzando il modello atomico di Bohr, descrivi l'origine delle righe dello spettro dell'idrogeno e in analogia formula una possibile spiegazione della origine delle righe di Pickering presenti nello spettro della stella Zeta Puppis. Indica quali informazioni fisiche puoi ricavare dal loro valore numerico.

Pickering dedusse che i valori numerici delle lunghezze d'onda delle righe che portano il suo nome potevano essere ricavati dalla formula di Balmer,

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 3, 4 \ldots$$

valida per le righe spettrali dell'idrogeno, utilizzando, però, a differenza di queste, valori di n seminteri.

2. Utilizzando i valori sperimentali dello spettro dell'idrogeno, riportati nella seguente tabella

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\lambda\ (nm)}$
3	656,3
4	486,1
5	434,1
6	410,2
7	397,0

determina graficamente o analiticamente il valore sperimentale della costante R_H, nota come costante di Rydberg, e calcola poi i valori dei numeri n

seminteri a cui corrispondono le righe di Pickering, verificando così la correttezza della sua deduzione.

Le righe di Pickering possono essere ricavate anche da una formula dello stesso tipo di quella di Rydberg, utilizzando un valore diverso per il parametro R_H, che indichiamo con R'_H.

$$\frac{1}{\lambda} = R'_H \left(\frac{1}{{n_1}^2} - \frac{1}{{n_2}^2}\right)$$

in cui gli indici n_1 e n_2 sono numeri interi con

$$n_1 = 1, 2, 3 \dots \dots \quad n_2 = 1, 2, 3 \dots \dots \quad n_2 > n_1$$

3. Dimostra che con $n_1 = 4$ e $R'_H = 4R_H$ si possono determinare valori interi di n_2 che corrispondono a tutte le righe osservate, cioè sia alle righe di Pickering sia a quelle di Balmer dello spettro dell'idrogeno.

Successivamente fu mostrato che l'intero spettro della stella Zeta Puppis era dovuto alla presenza di ioni idrogenoidi (ioni con un solo elettrone esterno e nucleo formato da Z protoni) e non all'idrogeno, e che a questi ioni si poteva applicare il modello atomico di Bohr.

4. Il modello di Bohr fornisce per la costante di Rydberg R_H dell'atomo di idrogeno l'espressione:

$$R_H = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2 c}$$

   Considerando le modifiche da introdurre nel modello di Bohr per uno ione idrogenoide, ricava l'espressione della costante R'_H. Confrontando inoltre il valore sperimentale R'_H con il valore ricavato da tale relazione individua il valore di Z e determina così lo ione la cui emissione dà origine allo spettro di Zeta Puppis.

Soluzione

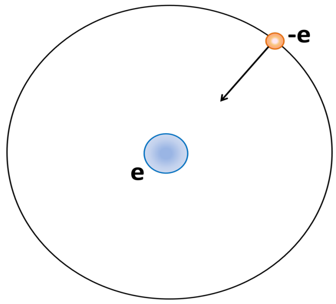
Punto 1

Secondo il modello di Bohr, l'atomo di idrogeno è costituito da un nucleo di carica positiva e da un elettrone, carico negativamente, che ruota intorno al nucleo su un'orbita circolare. La carica dell'elettrone e del nucleo hanno lo stesso modulo e. Tra le infinite orbite possibili solo alcune sono stabili. Quando un elettrone si trova su un'orbita stabile non irradia energia, come invece previsto dalla fisica classica. Le orbite stabili sono quelle il cui raggio soddisfa la condizione ipotizzata da Bohr

$$m_e v r = n\frac{h}{2\pi} \qquad con\, n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots$$

dove m_e è la massa dell'elettrone, v la sua velocità, r il raggio dell'orbita, h la costante di Planck ed n un numero intero.
Dalla precedente condizione si può dedurre che i raggi delle orbite stabili e le corrispondenti energie sono quantizzate.
La forza centripeta necessaria a mantenere l'elettrone sulla ennesima orbita stabile è data dall'interazione coulombiana tra l'elettrone e il nucleo

$$\frac{m_e v^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} \qquad (1)$$



Idrogeno

Ricavando v dalla relazione di quantizzazione di Bohr e sostituendola nella relazione precedente si deduce che il raggio della ennesima orbita stabile è

$$r_n = n^2\,\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \qquad (2)$$

Se ne deduce che i raggi delle orbite stabili sono quantizzati.
L'energia posseduta dall'elettrone è la somma della sua energia cinetica e dell'energia potenziale elettrica

$$E_n = K + U = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n}$$

Ricavando $m_e v^2$ dalla (1) e sostituendola nella relazione precedente si ha:

$$E_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n}$$

Sostituendo ad r_n l'espressione (2) si ha

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$$

Anche l'energia dell'elettrone è quantizzata.
Il valore di n determina lo stato quantico dell'elettrone, cioè l'orbita stabile sulla quale si trova e la corrispondente energia. Lo stato fondamentale è quello che corrisponde a $n=1$.
Quando un atomo di idrogeno riceve energia dall'esterno, ad esempio mediante un urto, l'elettrone può passare dallo stato quantico corrispondente a n_1, nel quale possiede energia E_1, allo stato quantico corrispondente a n_2, con $n_2>n_1$, nel quale possiede energia E_2, con $E_2>E_1$. In un tempo molto breve l'elettrone transita dallo stato di energia maggiore a quella di energia minore emettendo la differenza di energia nella forma di un fotone di energia

$$hf = E_2 - E_1$$

da questa relazione si ricava, per le lunghezze d'onda dei fotoni emessi:

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{f}{c}=\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right) \qquad con\, n_2>n_1$$

Che può essere scritta come:

$$\frac{1}{\lambda}=R_H\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right) \qquad con \quad n_2>n_1$$

Per $n_1=2$ si ottiene la formula di Balmer

$$\frac{1}{\lambda}=R_H\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n_2^2}\right) \qquad con \quad n_2>2$$

Poiché le energie sono quantizzate, lo sono anche le frequenze e le lunghezze d'onda dei fotoni emessi da un atomo di idrogeno dopo essere stato eccitato. Questo spiega perché lo spettro di emissione dell'idrogeno è composto solo da alcune particolari lunghezze d'onda che, analizzate con uno spettrofotometro, formano sul rilevatore delle linee distinte. Per questo motivo si dice che lo spettro di emissione dell'idrogeno è uno spettro a righe.
L'insieme delle lunghezze d'onda emesse nella transizione dell'elettrone da un qualsiasi stato quantico m verso lo stesso stato quantico n, con $n<m$, costituisce una serie.
La serie di Balmer, ad esempio, deriva dalle transizioni dell'elettrone da un qualsiasi stato quantico m, con $m>2$, allo stato quantico $n=2$. Le lunghezze d'onda appartenenti a questa serie appartengono al vicino ultravioletto e al visibile.
Altre serie sono quella di Lyman, prodotta dalle transizioni verso lo stato fondamentale $n=1$, le cui lunghezze d'onda appartengono all'ultravioletto e la serie di Paschen, prodotta dalle transizioni verso lo stato quantico $n=3$, le cui lunghezze d'onda appartengono all'infrarosso.

Sulla base di questa descrizione, le lunghezze d'onda corrispondenti alle righe di Pickering stanno ad indicare l'emissione di fotoni come conseguenza di salti quantici dell'elettrone tra livelli di energia differenti di un atomo.
Poiché queste lunghezze d'onda non sono previste dalla formula di Balmer, la loro presenza può essere interpretata in diversi modi:

- Le lunghezze d'onda di Pickering sono emesse dall'atomo di idrogeno e la formula di Balmer, così come è nota, non fornisce tutte le lunghezze d'onda emesse dall'atomo e va quindi riformulata affinché comprenda anche le righe di Pickering;
- Nella stella Zeta Puppis è presente, oltre all'idrogeno, anche un'altra sostanza che emette le righe di Pickering;
- Nella stella Zeta Puppis è presente una sostanza, diversa dall'idrogeno, che emette una serie di righe che comprende le righe di Pickering e quelle di Balmer;

Dalle lunghezze d'onda di Pickering si può calcolare l'energia del fotone emesso e questa deve corrispondere ai possibili salti quantici tra due diversi stati energetici. Il valore di questi salti energetici risulta:

$$\Delta E_1=hf_1=\frac{hc}{\lambda_1}=2.725\ eV$$

$$\Delta E_2=hf_2=\frac{hc}{\lambda_2}=2.292\ eV$$

$$\Delta E_3=hf_3=\frac{hc}{\lambda_3}=1.225\ eV$$

Punto 2

Il valore sperimentale della costante R_H presente nella formula di Balmer può essere calcolato invertendo la stessa formula di Balmer:

$$R_H = \frac{1}{\lambda(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2})} = \frac{4n^2}{\lambda(n^2 - 4)}$$

n	λ(nm)	$R_H (m^{-1} \cdot 10^7)$
3	656.3	1.097
4	486.1	1.097
5	434.1	1.097
6	410.2	1.097
7	397.0	1.097

Il valore che si ottiene è lo stesso entro la quanta cifra significativa.
Con questo valore di R_H si possono calcolare, dalla formula di Balmer, i valori dei numeri *n* corrispondenti alle lunghezze d'onda di Pickering.

$$n = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda R_H}}} = \sqrt{\frac{4\lambda R_H}{\lambda R_H - 4}}$$

λ(nm)	n
455.1	$4.5 = 9/2$
541.1	$3.5 = 7/2$
1012.3	$2.5 = 5/2$

La deduzione di Pickering risulta corretta. Le righe di Pickering si possono ricavare dalla formula di Balmer sostituendo ad *n* i valori seminteri 9/2, 7/2 e 5/2.

Punto 3

Se nella formula

$$\frac{1}{\lambda} = R'_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

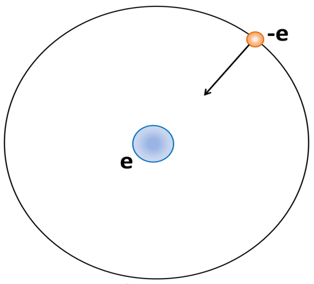
sostituiamo $n_1=4$ e $R'_H=4R_H$ si ha:

$$\frac{1}{\lambda} = R'_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = 4R_H \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = R_H \left(\frac{4}{4^2} - \frac{4}{n_2^2}\right) = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left(\frac{n_2}{2}\right)^2}\right)$$

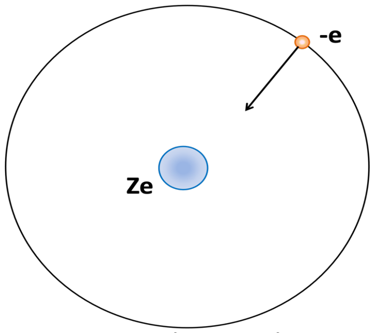
Per n_2 intero dispari di valore 5, 7 o 9, la formula permette di calcolare le lunghezze d'onda corrispondenti alle righe di Pickering.
Per n_2 intero pari e maggiore di 4, la formula permette di calcolare le lunghezze d'onda corrispondenti alle righe di Balmer.

Punto 4

Se si applica il modello di Bohr a un atomo idrogenoide occorre tener presente che l'interazione avviene tra una carica di modulo *e* ed una *Ze,* non più tra due cariche di modulo *e.*



Idrogeno



Atomo idrogenoide

La conseguenza è che i raggi e le energie dell'elettrone in un atomo idrogenoide si possono dedurre da quelle dell'idrogeno sostituendo alla carica *e* del nucleo la carica *Ze*.

I raggi delle orbite stabili e le corrispondenti energie per l'elettrone di un atomo idrogenoide sono:

Atomo di idrogeno	Atomo idrogeniode
$r_n = n^2 \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$	$r_n = n^2 \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e Z e^2}$
$E_n = -\dfrac{1}{n^2}\dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$	$E_n = -\dfrac{1}{n^2}\dfrac{m_e Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$

L'energia dei fotoni emessi nella transizione dallo stato di energia E_2 a quello di energia $E_1 < E_2$ è:

$$hf = E_2 - E_1$$

da questa relazione si ricava, per le lunghezze d'onda dei fotoni emessi:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{m_e Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \qquad con\ n_2 > n_1$$

Che può essere scritta come:

$$\frac{1}{\lambda} = R'_H\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \qquad con\ \ n_2 > n_1$$

Con

$$R'_H = \frac{Z^2 m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = Z^2 R_H$$

Essendo $R'_H = 4R_H$ ne segue che $Z=2$. Pertanto l'atomo idrogenoide che emette uno spettro costituito alle stesse righe dell'idrogeno e dalle le righe di Pickering è l'atomo di elio ionizzato.