Il vaso

L'azienda in cui lavori produce articoli da giardino e sei stato incaricato di rivedere il disegno di un vaso portafiori realizzato da un tuo collega.
Il vaso formato, di altezza h= 18 cm, è composto da due tronchi di cono aventi la base maggiore in comune e il disegno che ti è stato fornito
(figura 1) ne rappresenta la sezione longitudinale:

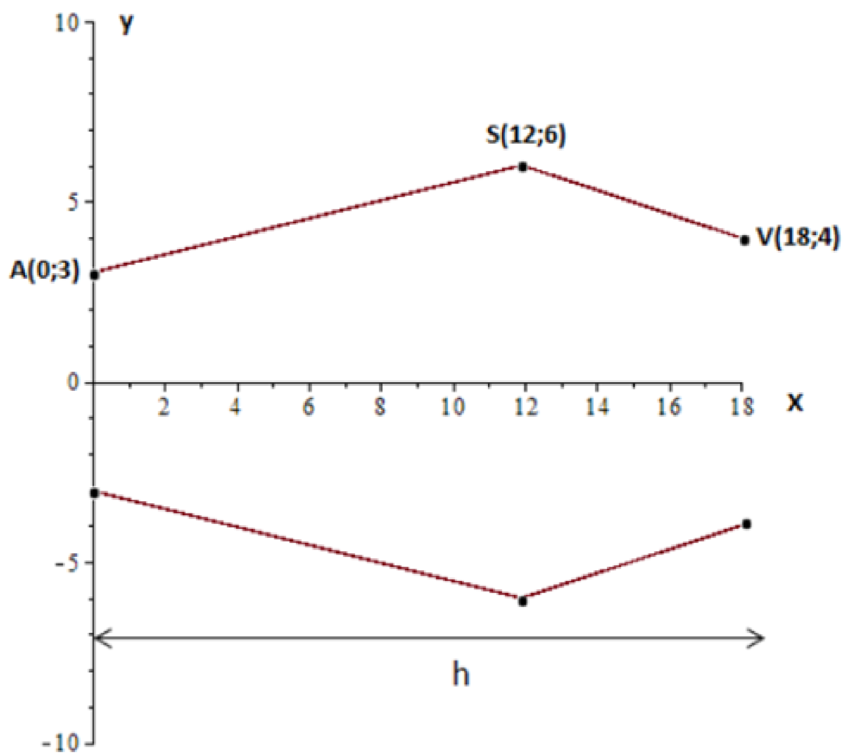


Figura 1

Nel riferimento cartesiano utilizzato in figura 1 l'unità di misura corrisponde a 1 cm. Il direttore del tuo reparto ti chiede di:

1) Verificare il valore del volume del vaso progettato dal tuo collega.

Se il volume risulta minore di 1,5 litri, bisogna rendere il vaso più alto, fino a fargli raggiungere il volume di 1,5 litri, lasciando però invariate le misure dei diametri

corrispondenti ai punti A, S e V, rendendo inoltre la forma meno spigolosa. Per chiarire meglio la sua richiesta, il direttore ti da un suo
disegno, modificato rispetto al precedente (figura 2)

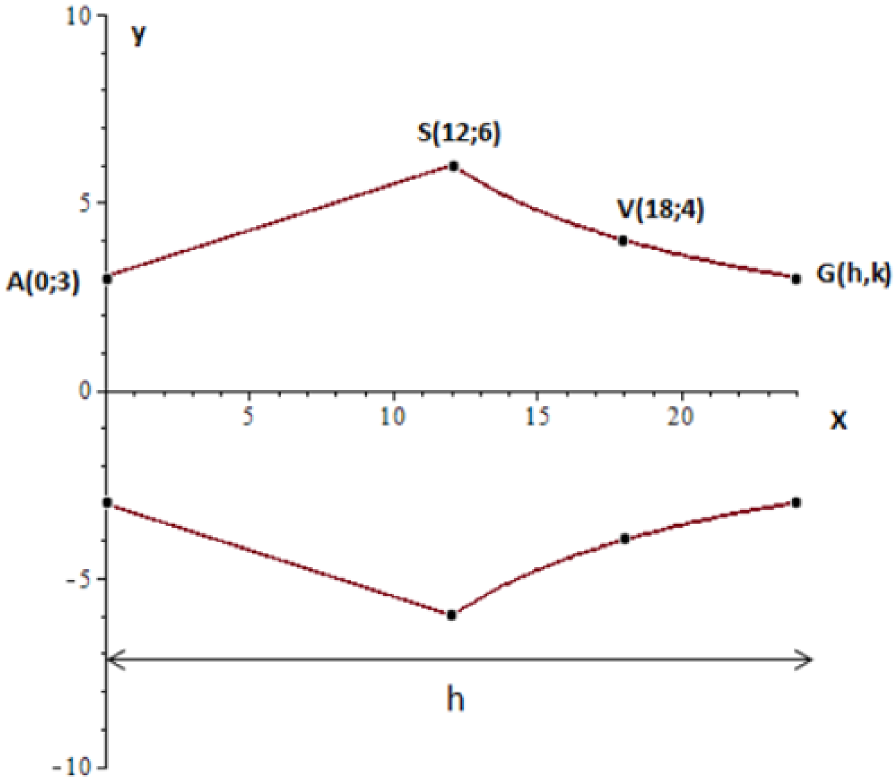


Figura 2

La curva passante per i punti S,V e G, disegnata dal direttore, può essere approssimata con un'iperbole di equazione y=a/x.

2)Determina, approssimando per eccesso al millimetro, i valori di h e k del punto G che consentono di soddisfare la richiesta di modifica del vaso.

Dopo che il primo esemplare del vaso è stato prodotto, il responsabile della produzione fa rilevare che l'eccessiva spigolosità del profilo nel punto S ne rende costosa la produzione.

3)Considera la funzione il cui grafico è rappresentato nella figura 2, nel semipiano $y \geq 0$; descrivi la natura del punto S giustificando le tue affermazioni;

4)Lasciando ancora invariate le misure dei diametri corrispondenti ai punti A ed S, individua la funzione razionale intera di secondo grado che consente di congiunge i punti A e S , eliminando il punto angoloso in S; disegna la nuova sagoma del vaso e individua il punto della curva AS in cui la pendenza del grafico è rimasta immutata rispetto alla sagoma precedentemente proposta.

Soluzione

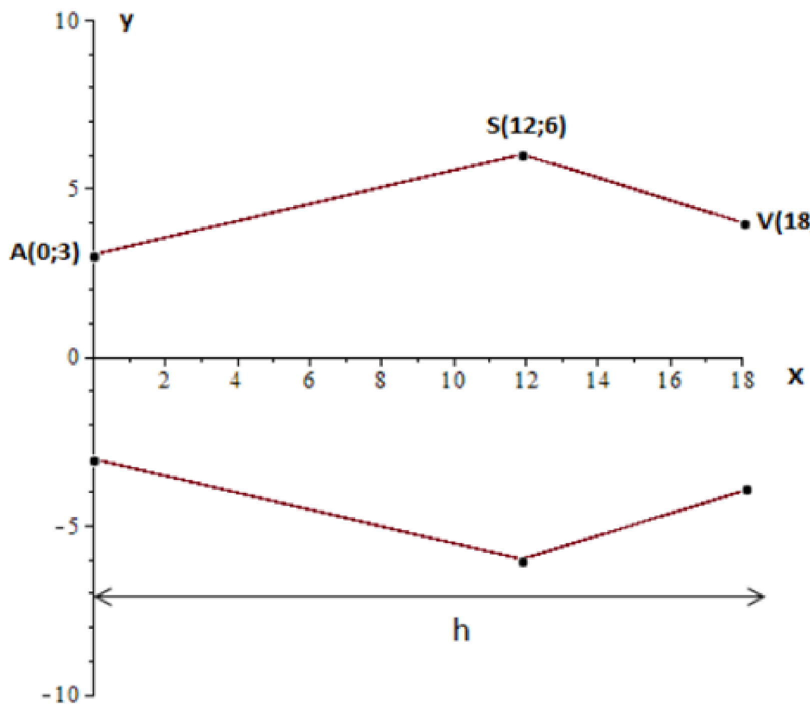


Fig1

PUNTO 1

1) Verificare il valore del volume del vaso progettato dal tuo collega.

Il vaso è formato da due tronchi di cono.
Per determinare il volume del vaso sommiamo il volume dei due tronchi calcolati separatamente.

Si possono usare due procedure :

Prima procedura con l'uso degli integrali

Equazione della retta per due punti:

$$\frac{y-yA}{yS-yA}=\frac{x-xA}{\mathrm{xS}-\mathrm{x}A}:$$

$$\frac{y-3}{6-3}=\frac{x}{12} \qquad \Rightarrow y=\frac{1}{4}x+3$$

Integrale per il calcolo del volume di un solido di rotazione $V=\pi\cdot\int_a^b \mathrm{f}^2(\mathrm{x})\,\mathrm{d}x$

$$V1 := \pi\cdot\int_0^{12}\left(\frac{1}{4}\cdot x+3\right)^2\mathrm{d}x=4\cdot\pi\int_0^{12}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot x+3\right)^2\mathrm{d}x=4\cdot\pi\left[\frac{\left(\frac{1}{4}\cdot x+3\right)^3}{3}\right]_0^{12}=\frac{4\cdot\pi}{3}$$

$$\left[\left(\frac{1}{4}\cdot x+3\right)^3\right]_0^{12}=\frac{4}{3}\cdot\pi\left[\left(\frac{1}{4}\cdot 12+3\right)^3-\left(\frac{1}{4}\cdot 0+3\right)^3\right]=\frac{4}{3}\cdot\pi\left[(6)^3-(3)^3\right]=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(216-27)=\frac{4}{3}\,\pi\,(189)=252\cdot\pi$$

$$\frac{y-yV}{yS-yV}=\frac{x-xV}{\mathrm{xS}-xV}:$$

$$\frac{y-4}{6-4}=\frac{x-18}{12-18} \qquad \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+10$$

$$V2 := \pi\cdot\int_{12}^{18}\left(-\frac{1}{3}\cdot x+10\right)^2\mathrm{d}x=-3\cdot\pi\int_{12}^{18}-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot x+10\right)^2\mathrm{d}x=-3\cdot\pi\left[\frac{\left(-\frac{1}{3}\cdot x+10\right)^3}{3}\right]_{12}^{18}=-\pi$$

$$\left[\left(-\frac{1}{3}\cdot x+10\right)^3\right]_{12}^{18}=-\pi\left[\left(-\frac{1}{3}\cdot 18+10\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\cdot 12+10\right)^3\right]=$$

$$=-\pi\left[(4)^3-(6)^3\right]=-\pi\cdot(64-216)=152\cdot\pi$$

$$V=V1+V2=404\,\pi\,cm^3=1269.2\,cm^3=1,27\ litri$$

Seconda procedura con l'uso della formula del volume del tronco di cono

Formula del volume del tronco di cono $V=\frac{1}{3}\,\pi\,h\,\left(R^2+R\,r+r^2\right)$

$$V1 = \frac{1}{3}\,\pi \cdot 12\,(36 + 6 \cdot 3 + 9) = 252\,\pi\, cm^3$$

$$V2 = \frac{1}{3}\,\pi \cdot 6\,(36 + 6 \cdot 4 + 16) = 152\,\pi\, cm^3$$

$$V = V1 + V2 = 252\,\pi + 152\,\pi = 404\,\pi = 1269.2\ cm^3 = 1,27\ litri$$

$Volume < di\ 1,5\ litri$

PUNTO 2

2)Determina, approssimando per eccesso al millimetro, i valori di h e k del punto G che consentono di soddisfare la richiesta di modifica del vaso.

F

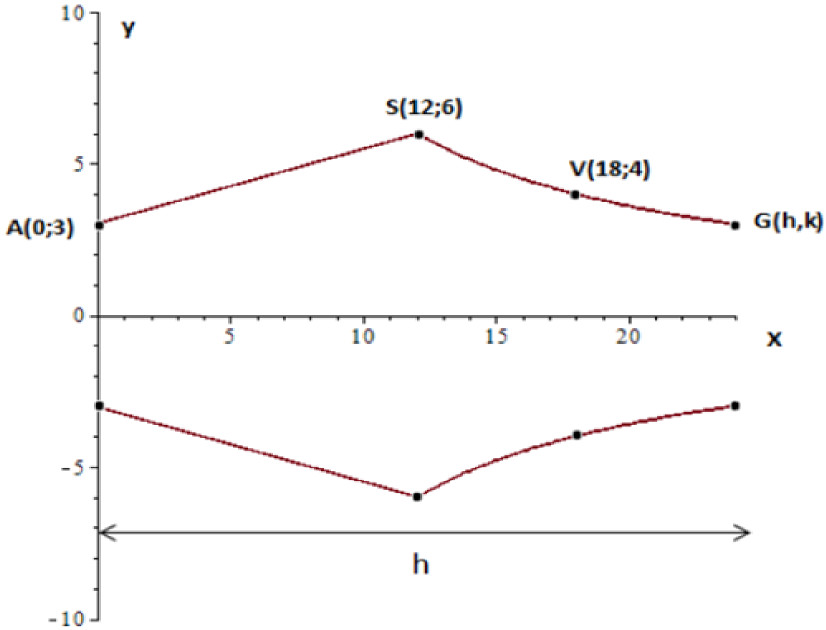


Figura 2

Innanzitutto occorre determinare l'equazione dell'iperbole equilatera , a tale scopo consideriamo la condizione di appartenenza del punto S(12,6) alla curva e sostituiamo le coordinate di S all'equazione $y = \frac{a}{x}$

$$6 = \frac{a}{12} \quad \Rightarrow a = 72 \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{72}{x}$$

Per ottenere un vaso di capacità approssimativamente uguale a 1,5 litri il collo deve essere allungato e la nuova altezza sarà l'ascissa di G .

cm^3 il volume finale del nuovo vaso $V_f = V1 + V3$

$1500\ cm^3 = V1 + V3$ dove $V1$ è il volume del tronco di cono già determinato al punto 1

$$V1 := \int_0^{12} \left(\frac{1}{4}\cdot x + 3\right)^2 \cdot \pi\, dx = 252\,\pi = 791.7\ cm^3$$

mentre V3 si può calcolare con il seguente integrale definito:

$$V3 = \pi \int_{12}^{h} \left(\frac{72}{x}\right)^2 dx = \pi \int_{12}^{h} \frac{5184}{(x)^2}\, dx =$$

$$V3 = 5184\,\pi \cdot \int_{12}^{h} \frac{1}{x^2}\, dx = 5184\,\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_{12}^{h} = 5184\,\pi\cdot\left[-\frac{1}{h} + \frac{1}{12}\right] = \pi\left(\frac{-5184}{h} + 432\right)$$

Impostiamo l'equazione per ricavare h

$$252\cdot\pi + \pi\left(\frac{-5184}{h} + 432\right) = 1500$$

$$252\cdot\pi - \frac{5184\,\pi}{h} + 432\cdot\pi = 1500;$$

$$\frac{5184\,\pi}{h} = 684\cdot\pi - 1500;$$

$$h = \frac{5184\,\pi}{684\cdot\pi - 1500} = \frac{432\,\pi}{57\,\pi - 125} = 25.1\ cm$$

$h = 25.1\ cm$ è la nuova altezza del vaso approssimata al millimetro e le coordinate di G sono

h= 25.1 e k $= \frac{72}{25.1} = 2.9$

Il punto G che soddisfa alla richiesta di modifica ha coordinate G(25.1;2.9)

PUNTO 3

3)Considera la funzione il cui grafico è rappresentato nella figura 2, nel semipiano $y \geq 0$; descrivi la natura del punto S giustificando le tue affermazioni;

Abbiamo precedentemente ricavato che la retta passante per A ed S ha equazione
$y=\frac{1}{4}x+3$, mentre la curva

tra i punti S e G è l'iperbole equilatera di equazione y=$\frac{72}{x}$

Il contorno del vaso descritto in figura 2 è rappresentato nel semipiano non negativo delle y dalla funzione definita nell'intevallo [0,25.1]

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}x+3 & 0 \le x < 12 \\ \frac{72}{x} & 12 \le x \le 25.1 \end{cases}$$

Tale funzione è continua in S(12,6) in quanto $\lim_{x \to 12^-} \frac{1}{4}x+3 = \lim_{x \to 12^+} \frac{72}{x} = 6$

Verifichiamo se è derivabile. A tale scopo calcoliamo la derivata prima di f(x) essa è data da

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{4} & 0 \le x < 12 \\ -\frac{72}{x^2} & 12 < x \le 25.1 \end{cases}$$

per verificare se f(x) è derivabile nel punto S consideriamo $\lim_{x \to 12^-} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ e

$\lim_{x \to 12^+} -\frac{72}{x^2} =-\frac{1}{2}$ Poichè la

derivata destra e sinistra nel punto S esistono finite ma diverse , possiamo concludere che il punto S è un punto angoloso.

Punto 4

4)Lasciando ancora invariate le misure dei diametri corrispondenti ai punti A ed S, individua la funzione razionale intera di secondo grado che consente di congiunge i punti A e S , eliminando il punto angoloso in S; disegna la nuova sagoma del vaso e individua il punto della curva AS in cui la pendenza del grafico è rimasta immutata rispetto alla sagoma precedentemente proposta.

La forma generale di una funzione razionale intera di secondo grado è

$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

Per determinare i parametri a,b,c consideriamo l' appartenenza dei punti A(0,3) ed S(12, 6) e la richiesta che il punto S non sia un punto angoloso.
Perchè quest'ultima condizione sia verificata occorre che la derivata prima della funzione razionale intera e quella dell'iperbole, calcolate
nel punto S, siano uguali , cioè che le due curve nel punto S siano tangenti alla stessa retta.

Quindi se consideriamo $y'=2\cdot a\cdot x+b$ e $y'=-\frac{72}{x^2}$ in S si ha : $2\cdot a\cdot 12+b=-\frac{72}{12^2}$

Impostiamo il sistema con le tre condizioni e lo risolviamo.

$$\begin{cases} 24\cdot a+b=-\frac{1}{2} \\ 3=a\cdot 0+b\cdot 0+c \\ 6=a\cdot 144+b\cdot 12+c \end{cases} ; \begin{cases} \frac{-48\cdot a-1}{2}=b \\ c=3 \\ 6=a\cdot 144+\frac{-48\cdot a-1}{2}\cdot 12+3 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \frac{-48\cdot a-1}{2}=b \\ c=3 \\ 6=a\cdot 144+(-48\cdot a-1)\cdot 6+3 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \frac{-48\cdot a-1}{2}=b \\ c=3 \\ 6=a\cdot 144-288\cdot a-6+3 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{-48\cdot a-1}{2}=b \\ c=3 \\ a\cdot 144=-9 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \frac{3-1}{2}=b \\ c=3 \\ a=-\frac{1}{16} \end{cases} ; \begin{cases} b=1 \\ c=3 \\ a=-\frac{1}{16} \end{cases}$$

La funzione razionale intera di secondo grado richiesta ha equazione :

$y=-\frac{1}{16}\cdot x^2+x+3$ ed è definita nell'intervallo in [0,12]

L'equazione della curva che rappresenta la nuova sagoma del vaso nell'intervallo [0,25.1] è

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{16}\cdot x^2+x+3 \;\; per & 0 \le x < 12 \\ \dfrac{72}{x} & 12 \le x \le 25.1 \end{cases}$$

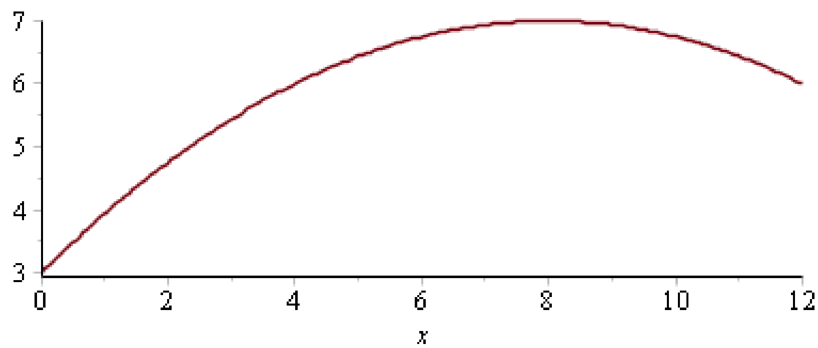
È una funzione definita per casi il cui Dominio è $[0; 25.1]$

Il grafico di tale funzione è definito :

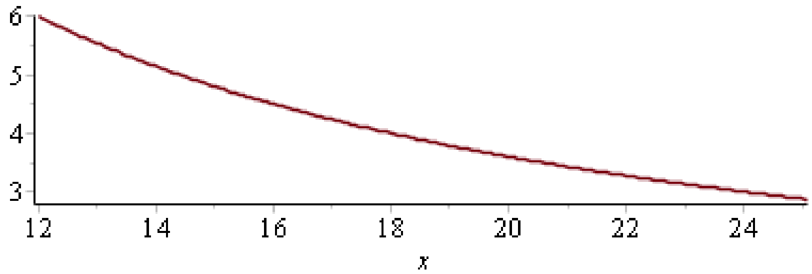
1) dall'arcol di parabola con la concavità verso il verso negativo delle y, compresa tra punti A ed S e avente il vertice (punto di massimo per la curva)

nel punto la cui ascissa che rende nulla la derivata prima $-\dfrac{2}{16}x+1=0 \quad \Rightarrow x=8$

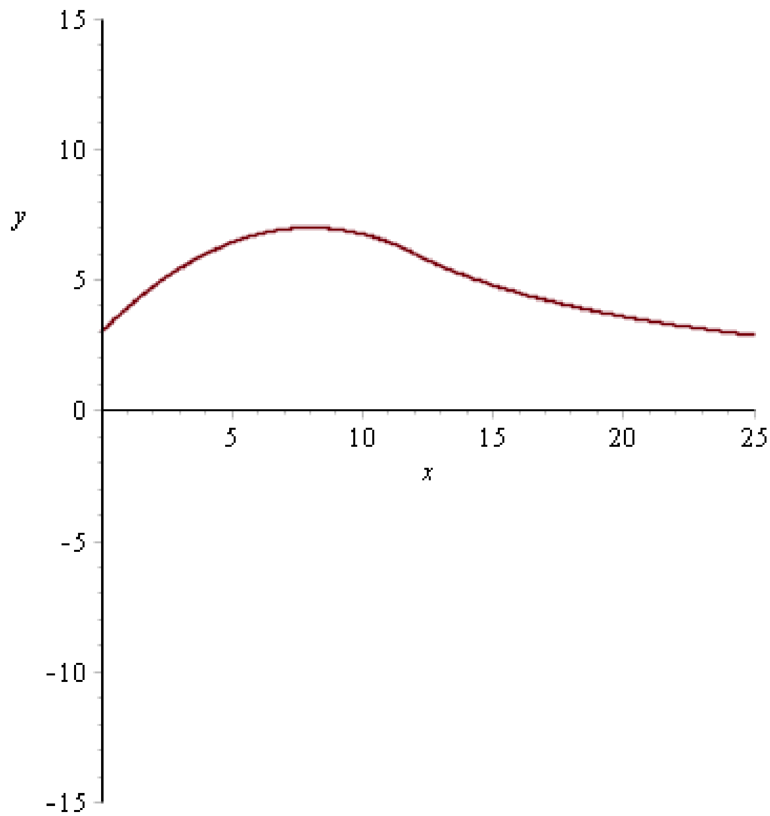
$y=-\dfrac{1}{16}\cdot 64+8+3=7$; $V(8, 7)$



2) dall'arco di iperbole equilatera compresa tra i punti S e G



Unendo i due archi la funzione ha il seguente grafico



La curva simetrica rispetto all'asse delle ascisse si ottiene applicando le equazioni della simmetria ripetto all'asse x :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = -y \end{cases}$$

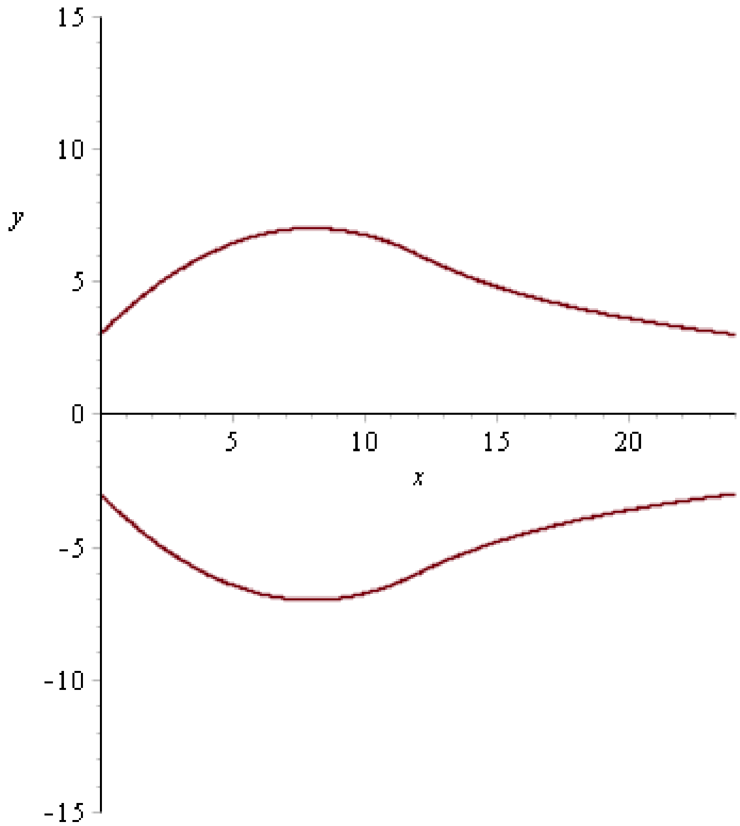
sostituendo si ha

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} \cdot x^2 - x - 3 \ per & 0 \leq x < 12 \\ -\frac{72}{x} & 12 \leq x \leq 25.1 \end{cases}$$

La sagoma del vaso è rappresentata dalla parte di piano delimitata dalle due funzioni

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{16} \cdot x^2 + x + 3 \ per & 0 \leq x < 12 \\ \frac{72}{x} & 12 \leq x \leq 25.1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} \cdot x^2 - x - 3 \ per & 0 \leq x < 12 \\ -\frac{72}{x} & 12 \leq x \leq 25.1 \end{cases}$$



Infine per individuare il punto della curva AS in cui la pendenza del grafico è rimasta immutata rispetto alla sagoma precedentemente proposta
utlizziamo il teorema di Lagrange .
Sappiamo che la pendenza della sagoma della figura 2 è data dal coefficiente angolare della retta A S

$$\frac{6-3}{12-0}=\frac{1}{4}$$

La funzione razionale intera y=$-\frac{1}{16}\cdot x^2+x+3$ essendo una funzione polinomiale è definita, continua e derivabile in $\Re$, e quindi soddisfa
nell'intervallo [0,12] alle ipotesi del teorema di Lagrange, pertanto esiste un punto c appartenente all'intervallo]0,12[, che ne verifica la tesi

$$f'(c)=\frac{f(12)-f(0)}{12-0}=\frac{6-3}{12-0}=\frac{1}{4}$$

cioè esiste un punto c appartenente all'intervallo]0,12[in cui $f'(c)$ è uguale alla pendenza della retta AS $\Rightarrow$

$$-\frac{2}{16}\cdot c+1=\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{8}\cdot c+1=\frac{1}{4} \Rightarrow c-8=-2 \Rightarrow c=6$$

$$f(6)=-\frac{1}{16}\cdot 36+6+3=-\frac{9}{4}+9=\frac{27}{4}$$

Nel punto di coordinate $\left(6, \frac{27}{4}\right)$ la tangente alla curva $y=-\frac{1}{16}\cdot x^2+x+3$ ha lo stesso coefficiente angolare della retta AS (vedi figura 3)

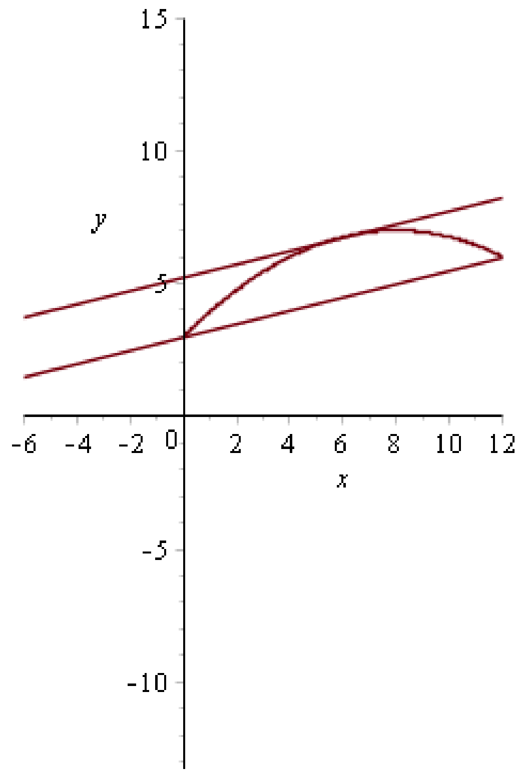


figura 3