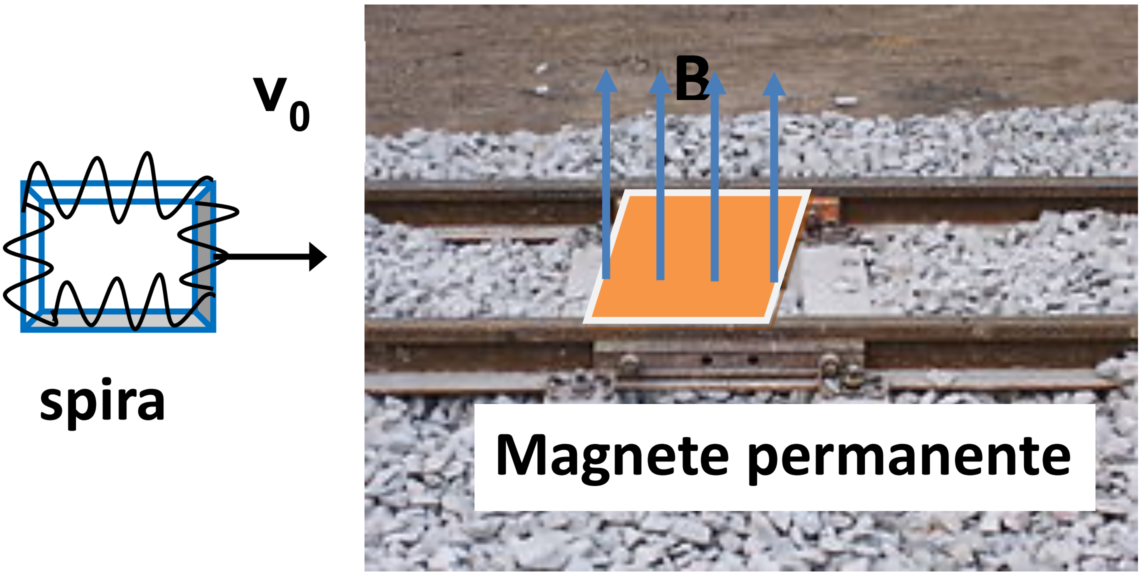
Il trenino elettrico

Hai giocato con il tuo fratellino con un bellissimo trenino elettrico da lui ricevuto in regalo per il compleanno. Osservandolo più volte ti sei chiesto quale sia il principio di funzionamento delle varie parti. In particolare, hai osservato che quando un vagone viene immesso in un binario morto, nei pressi del respingente finale il vagone subisce un forte rallentamento fino quasi a fermarsi; questo consente al vagone di raggiungere il respingente finale con velocità molto bassa e quindi di colpirlo senza conseguenze. Per capire il funzionamento di questo freno, hai analizzato in dettaglio il binario morto e un vagone; hai notato che sulla parte finale del binario morto è presente un piccolo magnete permanente di forma quadrata di lato L = 5,0 cm fissato tra le due rotaie del binario. Inoltre, sul fondo del vagone è presente una cornice quadrata di dimensione uguale al magnete su cui è avvolto un filo a formare una spira quadrata di resistenza elettrica R = 0,020 Ω. Analizzando il moto del vagone hai compreso che quando il vagone passa sopra il magnete, anche la spira passa sopra il magnete (come mostrato in figura) e che in questo passaggio il vagone rallenta.



1. Utilizzando le conoscenze che hai dell'elettromagnetismo, spiega qualitativamente l'origine della azione frenante dovuta al passaggio della spira sopra al magnete.

2. Assumendo che il magnete permanente generi sopra di sé un campo magnetico B = 0,85 T uniforme, perpendicolare al magnete stesso e quindi anche alla spira e trascurando tutti gli effetti di bordo, dimostra che l'equazione del moto della spira durante il passaggio sul magnete è:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2}{R}v$$

dove m = 50 g è la massa del vagone.

3. Dimostra o verifica che l'equazione del moto ha come soluzione $v = v_0 e^{-t/\tau}$ dove v_0 è la velocità del vagone (e quindi della spira) quando entra nel campo del magnete permanente, esprimendo la costante τ in termini delle altre grandezze presenti nell'equazione del moto e calcolandone il valore numerico.

4. Assumendo per la velocità iniziale il valore v_0 = 0,20 m/s, determina il tempo che la spira impiega ad attraversare completamente il magnete e la velocità che essa ha dopo aver attraversato il magnete.

5. Dimostra che se la velocità iniziale v_0 è inferiore ad un valore limite, la spira non riesce a superare il magnete permanente: in queste condizioni il freno agisce come un blocco insormontabile per il vagone. Determina il valore numerico della velocità limite.

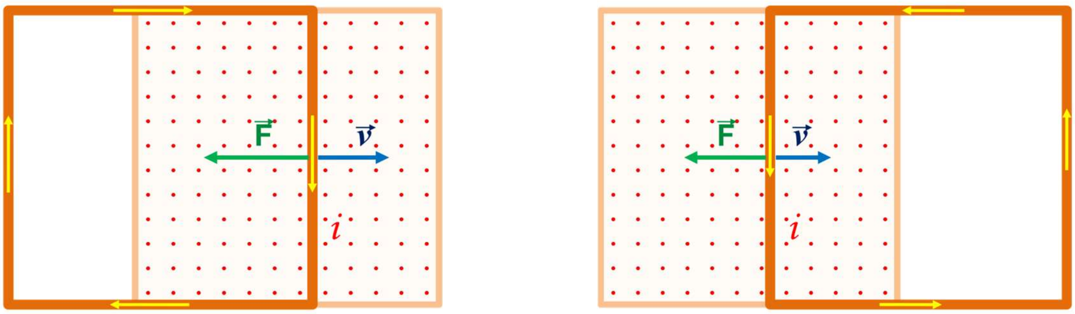
Soluzione

Punto 1

Quando la spira inizia ad entrare nel campo magnetico, si verifica una variazione del flusso del campo magnetico concatenato con la spira stessa. Con l'avanzamento della spira, il flusso concatenato aumenta e in essa si induce una corrente che, per la legge di Lenz, dovendosi opporre all'aumento del flusso, deve generare un campo discorde rispetto a quello preesistente e quindi deve circolare in verso orario.
Il lato anteriore della spira, percorso dalla corrente i e immerso nel campo magnetico, subisce da parte del campo $\vec{B}$ una forza

$$\vec{F} = i\,\vec{l} \times \vec{B}$$

Questa forza ha verso opposto a quello di avanzamento della spira, e produce se di essa un'azione frenante.



Quando la spira inizia ad uscire dal campo, il flusso concatenato comincia a diminuire e, per la legge di Lenz, si inverte il verso della corrente indotta. In questa fase è il lato posteriore della spira a subire l'azione frenante della forza che il campo produce su di esso.

Sia in fase di ingresso che in fase di uscita della spira dal campo, la forza prodotta dal campo magnetico sui lati della spira agisce come una forza frenante che fa perdere energia meccanica al sistema.
E' proprio questa energia che permette alla corrente di circolare nella bobina e di trasformarsi in calore per effetto Joule. Se il verso della corrente fosse opposto rispetto a quello previsto dalla legge di Lenz, assisteremmo alla produzione di energia elettrica e a un contemporaneo aumento dell'energia meccanica del sistema, in violazione del principio di conservazione dell'energia.

Punto 2

L'equazione del moto della spira si ottiene applicando ad essa la seconda legge della dinamica

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Nel caso in esame, $\vec{F}$ è la forza che il campo magnetico produce prima sul lato anteriore, poi su quello posteriore delle spira, per il fatto che questi, percorsi da corrente, sono immersi nel campo magnetico.
Come spiegato nel punto precedente, il verso di questa forza è opposto a quello del moto della spira sia durante la fase di ingresso nel campo magnetico sia durante la fase di uscita. Il suo modulo è:

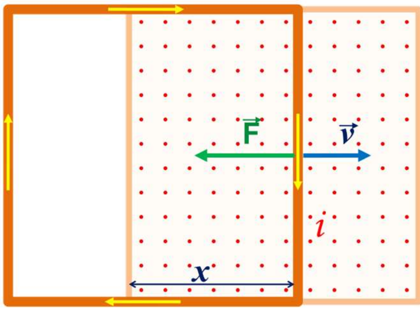
$$F = B \cdot i \cdot l \cdot sen90° = B \cdot i \cdot l$$

dove i è la corrente indotta. Quest'ultima può essere calcolata deducendo la f.e.m. indotta dalla legge di Faraday - Neumann e applicando poi la prima legge di Ohm. Scegliamo il verso del vettore superficie $\vec{S}$ concorde con quello del campo.
Durante la fase di ingresso della spira nel campo, detta x la posizione del lato anteriore della spira rispetto al bordo sinistro del campo, si ha:

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \bullet \vec{S} = B \cdot S \cdot cos0° = B \cdot l \cdot x(t)$$

$$|f.e.m.| = \left|-\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}\right| = \left|-\frac{d\Phi(B \cdot l \cdot x)}{dt}\right| = B \cdot l \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot l \cdot v$$

$$i = \frac{|f.e.m.|}{R} = \frac{B \cdot l}{R} v$$



Scegliamo di descrivere il moto della spira in un sistema di riferimento in cui l'asse x ha verso concorde con quello della velocità. In questo riferimento il modulo della velocità è positivo mentre quello della forza F è negativo. Pertanto:

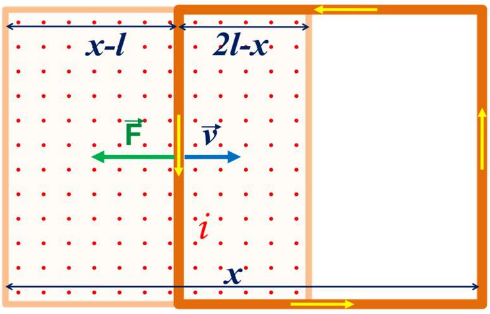
$$F = -B \cdot i \cdot l = -B \cdot \left(\frac{B \cdot l}{R} v\right) \cdot l = -\frac{B^2 \cdot l^2}{R} v$$

Esprimendo l'accelerazione come

$$a = \frac{dv}{dt}$$

L'equazione del moto della spira diventa:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 \cdot l^2}{R} v$$



Durante la fase di uscita della spira dal campo, il flusso concatenato con la spira è:

$$\Phi(\vec{B}) = [B \cdot l \cdot (2l - x)]$$

$$|f.e.m.| = \left|-\frac{d\Phi[B \cdot l \cdot (2l - x)]}{dt}\right| = B \cdot l \cdot v$$

Questa espressione è uguale a quella determinata nella fase di ingresso. Anche l'espressione della corrente, il modulo della forza e il suo verso non cambiano rispetto alla fase di ingresso, per cui l'equazione del moto resta la stessa della fase di ingresso.

<u>Punto 3</u>

Verifichiamo che l'equazione $v = v_0 e^{-t/\tau}$ soddisfa l'equazione del moto.

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 \cdot l^2}{R}\ v$$

$$m\frac{d(v_0 e^{-t/\tau})}{dt} = -\frac{B^2 \cdot l^2}{R}\ v_0 e^{-t/\tau}$$

$$-m\frac{v_0 e^{-t/\tau}}{\tau} = -\frac{B^2 \cdot l^2}{R}\ v_0 e^{-t/\tau}$$

L'uguaglianza è soddisfatta se

$$\tau = \frac{mR}{B^2 l^2}$$

Il valore di τ è:

$$\tau = \frac{5 \cdot 10^{-2} kg \cdot 2 \cdot 10^{-2}\Omega}{(0.85T)^2 \cdot (5 \cdot 10^{-2} m)^2} = 0.55s$$

Punto 4

La spira attraversa completamente il campo nell'istante T in cui il suo lato anteriore ha percorso una distanza pari a $2l$. La relazione tra velocità della spira e posizione *x(t)* del suo lato anteriore è

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad dx(t) = v(t)dt$$

Integrando entrambi i membri si ha:

$$\int_0^{2l} dx = \int_0^T v(t)dt = \int_0^T v_0 e^{-t/\tau} dt$$

$$2l = \left| -\tau v_0 e^{-t/\tau} \right|_0^T = -\tau v_0 e^{-T/\tau} + \tau v_0 = \tau v_0 \left(1 - e^{-T/\tau}\right)$$

Da questa equazione possiamo calcolare il tempo T necessario ad attraversare il campo:

$$1 - e^{-T/\tau} = \frac{2l}{\tau v_0} \qquad \Rightarrow \qquad e^{-T/\tau} = 1 - \frac{2l}{\tau v_0} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{T}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{2l}{\tau v_0}\right)$$

Quindi:

$$T = -\tau \cdot \ln\left(1 - \frac{2l}{\tau v_0}\right) = -0.55s \cdot \ln\left(1 - \frac{0.1m}{0.55s \cdot 0.2\ m/s}\right) = 1.32s$$

La velocità raggiunta in questo istante è:

$$v = v_0 e^{-t/\tau} = 0.2m/s \cdot e^{-1.32s/0.55s} = 0.018m/s$$

<u>Punto 5</u>

Il tempo impiegato dalla spira per uscire dal campo è quello calcolato in precedenza:

$$T = -\tau \cdot \ln\left(1 - \frac{2l}{\tau v_0}\right)$$

La velocità finale della spira nell'istante in cui esce dal campo è:

$$v_f = v_0 e^{-T/\tau}$$

Sostituendo a T l'espressione precedente si ha:

$$v_f = v_0 e^{\ln\left(1-\frac{2l}{\tau v_0}\right)} = v_0\left(1 - \frac{2l}{\tau v_0}\right) = v_0 - \frac{2l}{\tau}$$

La velocità finale è nulla se:

$$v_0 - \frac{2l}{\tau} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \frac{2l}{\tau} = \frac{0.1\ m}{0.55\ s} = 0.18\ s$$

Se la velocità v_0 con cui la spira entra nel campo magnetico è inferiore a questo valore, essa non riesce ad uscire completamente dal campo.