Il porta scarpe da viaggio

Un artigiano vuole realizzare contenitori da viaggio per scarpe e ipotizza contenitori con una base piana e un'altezza variabile sagomata che si adatti alla forma della scarpa.

L'artigiano procede alla progettazione del profilo e stabilisce che tali contenitori debbano essere a base rettangolare di dimensioni 20 cm per 30 cm e che l'altezza, procedendo in senso longitudinale da 0 a 30 cm, segua l'andamento così descritto: ad un estremo, corrispondente alla punta della scarpa, l'altezza è 4 cm, a 10 cm da questo estremo la sagoma flette e l'altezza raggiunge 8 cm, a 20 cm dall'estremo l'altezza raggiunge 12 cm, mentre all'altro estremo l'altezza è zero.

Prima di procedere alla produzione di un prototipo, l'artigiano vuole essere sicuro del suo progetto. Pensa che occorra una competenza in matematica per avere la certezza che il contenitore realizzato in base al profilo da lui progettato possa contenere vari tipi di scarpe.

Ti chiede quindi di procedere alla modellizzazione del profilo del prototipo:

1. Scelto un riferimento cartesiano *Oxy* in cui l'unità di misura corrisponda a un decimetro, individua, tra le seguenti funzioni, quella che possa meglio corrispondere al profilo descritto, e giustifica la risposta:

$(a \quad c) \quad (x \quad d)$ $[0,3]$

$\dfrac{(ax \quad b) \qquad (ax \quad b)}{\quad}$ $[0,3]$

$[0,3]$

2. dopo aver scelto la funzione che meglio rappresenta il profilo determina i valori dei parametri *a*, *b*, *c*, e *d* in base alle dimensioni definite dall'artigiano;

3. studia la funzione che hai individuato e rappresentala graficamente nel riferimento cartesiano *Oxy*; verifica se il contenitore possa essere adoperato con una scarpa alta 14 cm.

L'artigiano decide di valutare anche le condizioni di vendita del prodotto. Il costo di produzione è pari a 5 € per ogni contenitore, più un costo fisso mensile di 500 €; in base alla sua conoscenza del mercato, ritiene di poter vendere ciascun contenitore a 15 € e immagina che aumentando sempre più il numero di contenitori prodotti in un mese il rapporto ricavo/costo possa crescere indefinitamente;

4. mostra che ciò non è vero e per illustrare all'artigiano il risultato matematico disegna l'andamento del rapporto ricavo/costo al crescere del numero di contenitori prodotti in un mese.

Soluzione

Risoluzione

Punto 1

Dopo aver scelto come unità di misura (dm), dai dati si ricava che la curva deve passare per i punti $A\left(0, \frac{2}{5}\right)$, $B\left(1, \frac{4}{5}\right)$, $C\left(2, \frac{6}{5}\right)$ e $D(3, 0)$

a) L' equazione $y = e^{(a \cdot x^2 + bx + c)} + (x + d)^2$ è da scartare perchè somma di una funzione esponenziale(per la quale non esiste nessun valore reale che la renda nulla), con una quantità al quadrato che è sempre non negativa, quindi $y \neq 0 \ \ \forall x \in \Re$, di conseguenza il punto $D(3, 0)$ non può soddisfare tale equazione.

b)L'equazione $y = \frac{\sin^2(a \cdot x + b) + \cos^2(a \cdot x + b)}{c \cdot x + d}$ è da scartare perchè dalla prima relazione fondamentale della goniometria sappiamo che il numeratore è sempre uguale a 1 e, di conseguenza, per i valori di x per cui esiste, il punto $C(3, 0)$ non può soddisfare tale equazione.

L'unica funzione che può soddisare le condizioni poste dal problema è rappresentata dalla cubica

$$y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

Punto 2

Per trovare i coefficienti *a,b,c ed* consideriamo la condizione di appartenenza alla curva dei 4 punti.

$A\left(0, \frac{2}{5}\right)$, $B\left(1, \frac{4}{5}\right)$ *punto di flesso*, $C\left(2, \frac{6}{5}\right)$ e $D(3, 0)$

$$\begin{cases} d = \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} = a + b + c + d \\ \frac{6}{5} = 8 \cdot a + 4 \cdot b + 2 \cdot c + d \\ 0 = 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d \end{cases}$$

$$\left\{a = -\frac{4}{15}, b = \frac{4}{5}, c = -\frac{2}{15}, d = \frac{2}{5}\right\} \quad \textbf{(1.1)}$$

La curva ha equazione $y=-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5}$

$$y=-\frac{4}{15}x^3+\frac{4}{5}x^2-\frac{2}{15}x+\frac{2}{5} \tag{1.2}$$

Punto 3

Studio della funzione

$y=-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5}$

La funzione essendo polinomiale è definita $\forall$ x $\in \mathcal{R}$, tuttavia noi la studiamo e la rappresenteremo nell'intervallo [0,3]

Non calcoliamo f(-x) perchè in tale insieme la funzione non ha simmetrie evidenti cioè non è ne pari ne dispari.

Intersezione con l'asse delle ordinate

x=0 y=$\frac{2}{5}$

Intersezione con l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} y=0 \\ y=-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5} \end{cases}$$

$-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5}=0$

$$-\frac{4}{15}x^3+\frac{4}{5}x^2-\frac{2}{15}x+\frac{2}{5}=0 \tag{1.1.1}$$

Semplifichiamo per 2 e facciamo il m.c.m.

$-2\,x^3+6\,x^2-\mathrm{x}+3=0$

$$-2\,x^3+6\,x^2-x+3=0 \tag{1.1.2}$$

$$-(x-3)\left(2\,x^2+1\right)=0 \tag{1.1.3}$$

Soluzione $\boldsymbol{x=3}$

I punti di intersezione con gli assi li conoscevamo già e sono
$A\left(0, \frac{2}{5}\right)$ e $D(3, 0)$

Segno della funzione
y>0 $-(x-3)\left(2x^2+1\right) > 0$ per x<3 .
Quindi nell'intervallo [0,3] la funzione è sempre positiva.

Nell'intervallo [0,3] non vanno ricercati ***A*.O.** e neanche **A. Obl.** perchè è un intervallo chiuso e limitato.
Inoltre non ci sono **A.V.** perchè non ci sono punti di discontinuità.
Calcoliamo la derivata prima per studiare la monotonia della funzione ed eventuali punti di massimo o di minimo.

Calcoliamo la deirivata prima

$$\frac{d}{dx}\,y(x) = -\frac{4}{5}x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{2}{15} \qquad \textbf{(1.1.4)}$$

Segno della derivata prima

$$\left\{x \le 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30},\, 1 - \frac{1}{6}\sqrt{30} \le x\right\} \qquad \textbf{(1.1.5)}$$

y'≥ 0 $\quad 1 - \frac{1}{6}\sqrt{30} \le x \le 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}$ y *cresce*

$y' < 0$

$$per\ \ 0 \le x < 1 - \frac{1}{6}\sqrt{30} \ \vee\ 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30} < x \le 3\ \ y \quad decresce$$

Dall'analisi della monotonia risulta che ∃ un punto di minimo relativo per x=
$1 - \frac{1}{6}\sqrt{30}$ e un massimo relativo nel punto
di ascissa x= $1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}$

$$eval\left(-\frac{4}{15}\cdot x^3 + \frac{4}{5}\cdot x^2 - \frac{2}{15}\cdot x + \frac{2}{5}, x = 1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\right)$$

$$-\frac{4}{15}\left(1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^3 + \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^2 + \frac{4}{15} - \frac{1}{45}\sqrt{30} \qquad \textbf{(1.1.6)}$$

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{27}\sqrt{30} \tag{1.1.7}$$

$eval\left(-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5}, x=1-\frac{1}{6}\sqrt{30}\right)$

$$-\frac{4}{15}\left(1-\frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^3+\frac{4}{5}\left(1-\frac{1}{6}\sqrt{30}\right)^2+\frac{4}{15}+\frac{1}{45}\sqrt{30} \tag{1.1.8}$$

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{27}\sqrt{30} \tag{1.1.9}$$

$\mathrm{Max}\left(1+\frac{1}{6}\sqrt{30}, \frac{4}{5}+\frac{2}{27}\sqrt{30}\right)$, $\min\left(1-\frac{1}{6}\sqrt{30}, \frac{4}{5}-\frac{2}{27}\sqrt{30}\right)$

Calcoliamo la derivata seconda

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)=-\frac{8}{5}x+\frac{8}{5} \tag{1.1.10}$$

$y''=-\frac{8}{5}x+\frac{8}{5}$

$y''\geq 0$

$solve\left(\left\{-\frac{8}{5}x+\frac{8}{5}\geq 0\right\}, x\right)$

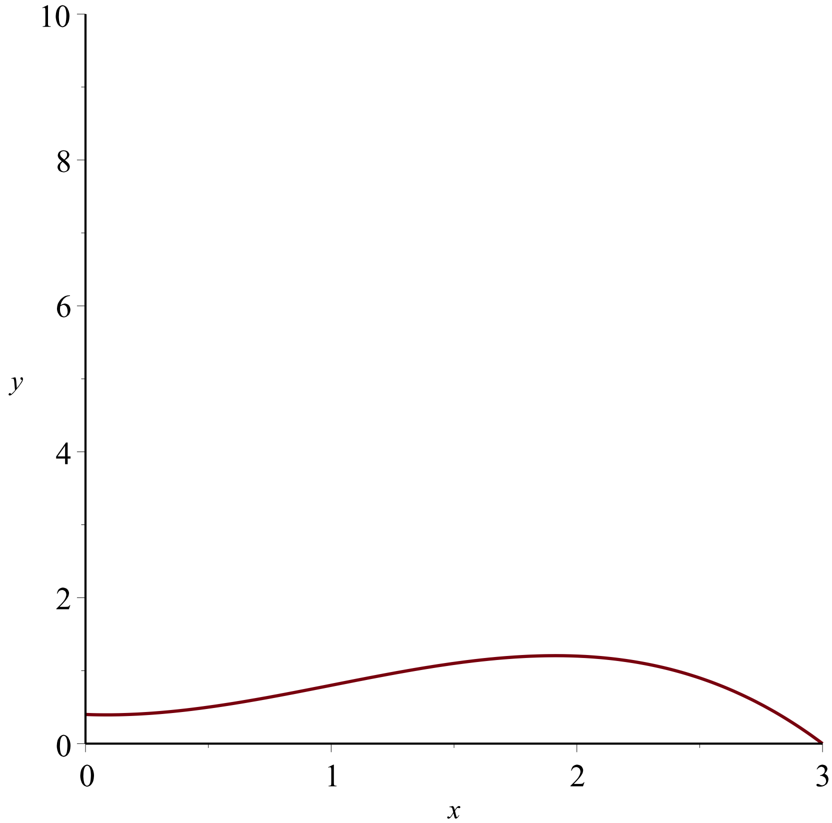
$$\{x\leq 1\} \tag{1.1.11}$$

$y''>0 \quad 0\leq x\leq 1 \quad \cup$
$y''<0 \quad per\ 1<x<3 \quad \cap$

$y''>0 \quad se \quad 0\leq x\leq 1$ y convessa

$y''<0 \quad 1<x<3 \quad y \quad concava$ $\quad flesso\left(1, \frac{4}{5}\right)$ come indicato

nelle ipotesi
rappresentiamo la curva
$plot\left(-\frac{4}{15}\cdot x^3+\frac{4}{5}\cdot x^2-\frac{2}{15}\cdot x+\frac{2}{5}, x=0..3, y=0..10\right)$



Poichè l'ordinata del punto di massimo è approssimativamente data da

$$y_M = evalf\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{27}\sqrt{30}, 3\right)$$

$$y_M = 1.21 \tag{1.1.12}$$

il contenitore può essere utilizzato per scarpe aventi una altezza massima di poco superiore a 12 cm e **quindi non può contenere scarpe alte 14 cm**

Punto 4

Per mostrare che il rapporto ricavo costi **non cresce indefinitamente**, indichiamo con n il numero di pantofole prodotte in un mese,
e definiamo tale rapporto:

$$\frac{15 \cdot n}{500 + 5 \cdot n}$$

Calcoliamo il $\lim_{n\to\infty} \frac{15\,n}{500+5\,n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{15\,n}{500+5\,n} = 3$$

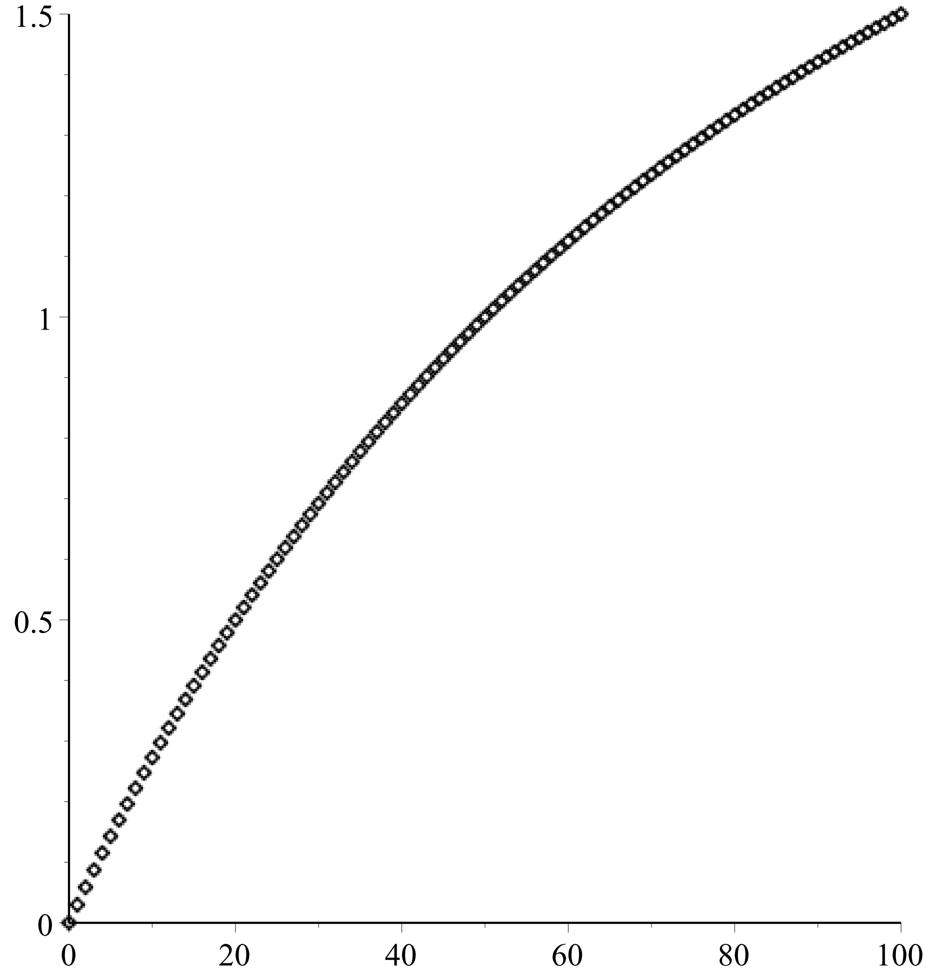
Otteniamo quindi che il ricavo, contrariamente a quanto pensava l'artigiano, al crescere di n si stabilizza e ***tende*** a diventare tre volte il costo

Vediamo come il processo si può rappresentare graficamente.

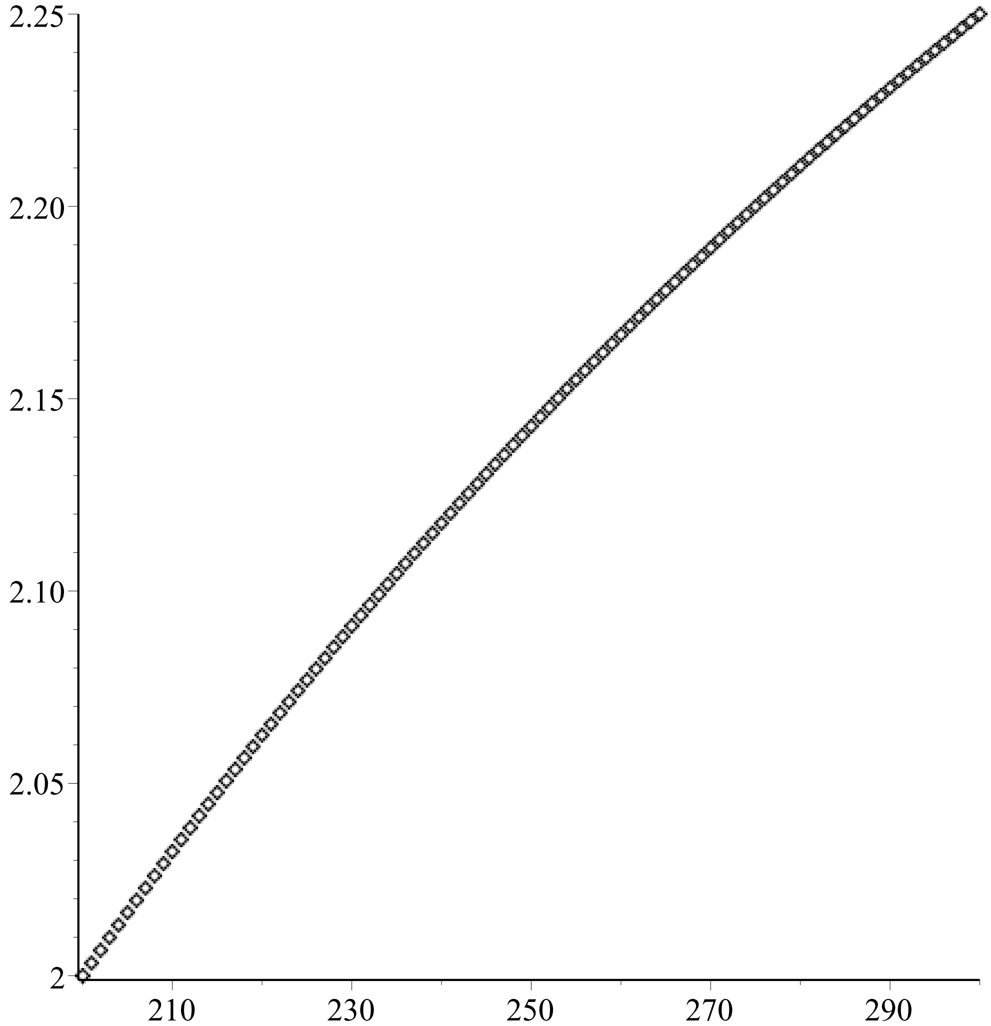
La funzione che rappresenta il rapporto ricavo/costo al crescere del numero di contenitori prodotti in un mese **è la successione**

$$a_n = \frac{15\cdot n}{500+5\cdot n}$$

Il suo grafico potrebbe essere **rappresentato per quantità discrete 0<n<100** come segue :



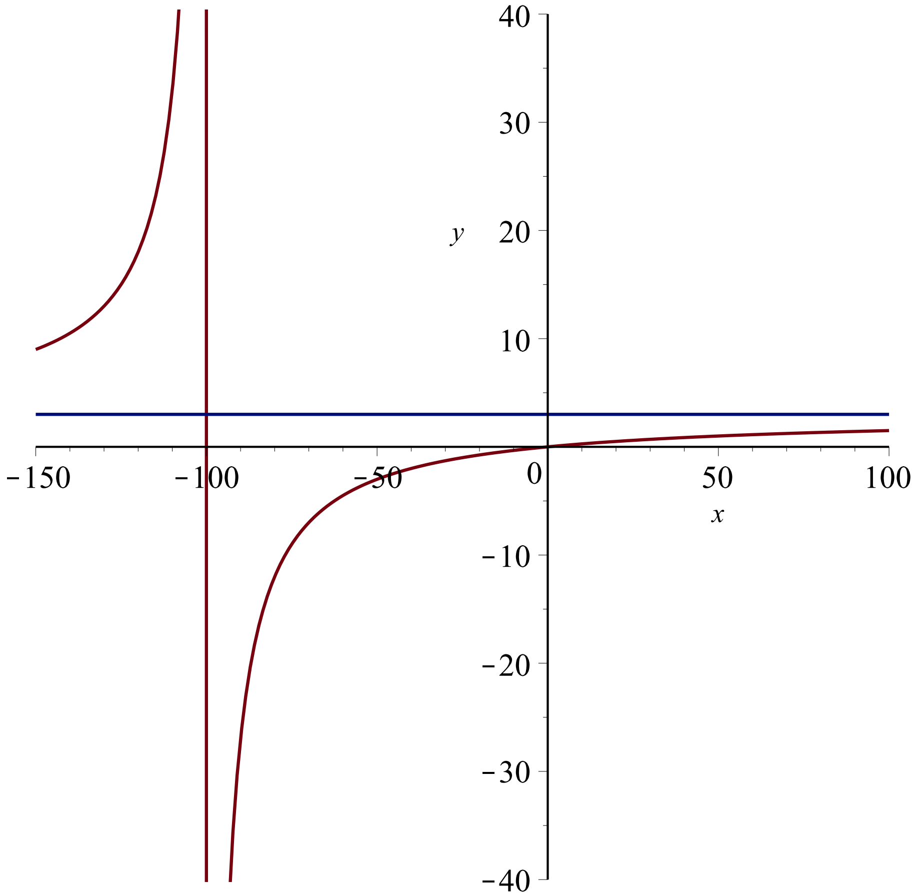
Analizzando il grafico si può dedurre che al crescere del numero dei contenitori prodotti il rapporto aumenta come pensa l'artigiano;
si può mostrare all'artigiano che affinchè il ricavo eguagli la spesa devono essere prodotti e **venduti almeno 50 contenitori**; solo raggiungendo i 200 contenitori (grafico per 200<n<300) il ricavo è doppio della spesa, superati i 200 contenitori il ricavo cresce.



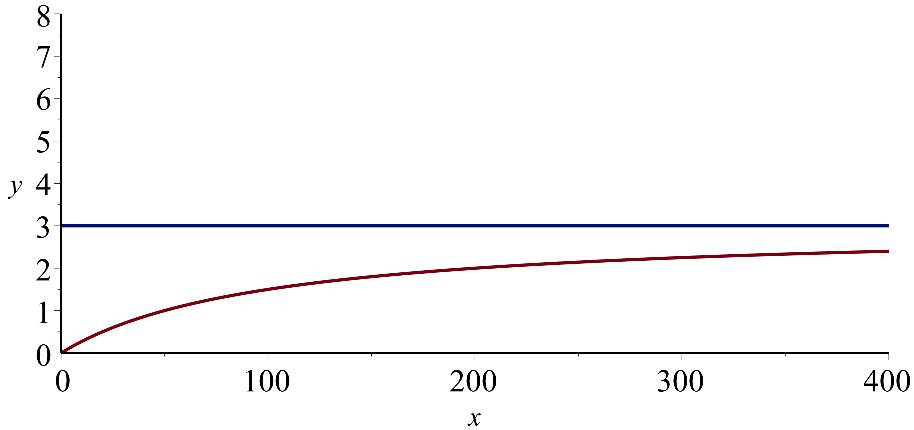
Per mostrare <u>graficamente</u> all'artigiano come il ricavo non cresce indefinitamente occorre mostrare nel grafico la stabilizzazione $(n \to \infty)$ e quindi dobbiamo associare al rapporto ricavo/costo la **funzione continua** che si ottiene sostituendo ad n (variabile discreta) la variabile continua x $\in \mathbb{R}$ e si ha :

$$y = \frac{15 \cdot x}{500 + 5 \cdot x}$$

Essa è una funzione omografica avente come asintoti le rette $x = -100$ (*asintoto verticale*) e $\boldsymbol{y = 3}$ (***asintoto orizzontale***)



Poichè però il numero di contenitori non può essere negativo, l'andamento della funzione che modellizza il rapporto ricavo/costo è costituito dalla parte di grafico che si ottiene per $x \geq 0$.
Tale grafico è :



Dal grafico si mostra all'artigiano che al crescere del numero dei contenitori prodotti il rapporto tende a stabilizzarsi e quindi non a crescere indefinitamente, in modo che il ricavo ***<u>tende</u>*** a diventare **il triplo della spesa**, puoi anche aggiungere all'artigiano, che sicuramente ti chiederà con quanti contenitori prodotti il ricavo è 3 volte il costo, che **il numero di contenitori che permette il 90% di 3 è 900, ma non è possibile che il rapporto ricavo/costo sia uguale a 3**, è molto complesso spiegare a chi non ha la competenza in matematica cos'è un asintoto orizzontale!