

Il metodo delle parabole di Thomson

Navigando in Internet per una ricerca sugli isotopi hai trovato il seguente articolo di J. J. Thomson pubblicato sui “Proceedings of The Royal Society” nel 1913.

PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY.

SECTION A.—MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES.

BAKERIAN LECTURE :—*Rays of Positive Electricity.*

By Prof. Sir J. J. THOMSON, O.M., F.R.S.

(Lecture delivered May 22,—MS. received June 4, 1913.)

[PLATES 1—3.]

In 1886, Goldstein observed that when the cathode in a vacuum tube was pierced with holes, the electrical discharge did not stop at the cathode; behind the cathode, beams of light could be seen streaming through the holes in the way represented in fig. 1. He ascribed these pencils of light to rays

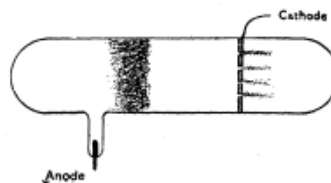


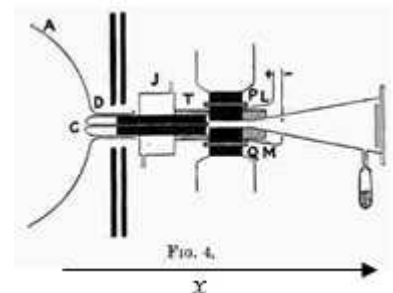
FIG. 1.

passing through the holes into the gas behind the cathode; and from their

L'esperimento a cui l'articolo fa riferimento può essere considerato come uno tra i più importanti del secolo ventesimo, nel passaggio dalla Fisica cosiddetta Classica alla Fisica Moderna, più precisamente l'inizio della Fisica Subatomica.

Nell'articolo Thomson descrive le sue osservazioni sui cosiddetti “raggi canale”, formati da quelli che noi oggi chiamiamo ioni, quando attraversano un campo elettrico uniforme \vec{E} e un campo magnetico, pure uniforme, \vec{B} paralleli tra loro e perpendicolari alla velocità delle particelle \vec{v} .

Nel disegno riprodotto qui affianco ed estratto dall'articolo originale, le particelle entrano attraverso l'ugello C e, con velocità parallele tra loro, attraversano il campo elettrico e quello magnetico nella regione identificata dalle lettere PLQM. I campi sono paralleli tra di loro e perpendicolari al piano della pagina.



Nell'articolo Thomson scrive:

“Supponi che un fascio di queste particelle si muova parallelamente all'asse x , colpendo un piano fluorescente perpendicolare al loro cammino in un punto O . Se prima di raggiungere il piano agisce su di esse un campo elettrico parallelo all'asse y , il punto ove le particelle raggiungono il piano è

spostato parallelamente all'asse y di una distanza pari a:

$$y = \frac{q}{mv_0^2} A_1$$

dove q , m e v_0 , sono rispettivamente la carica, la massa e la velocità delle particelle e A_1 è una costante dipendente dal campo elettrico e dal cammino della particella ma indipendente da q , m , v_0 . Se invece sulle particelle agisce un campo magnetico anch'esso parallelo all'asse y , le particelle vengono deflesse parallelamente all'asse z e il punto ove le particelle raggiungono il piano è spostato parallelamente all'asse z di una distanza pari a:

$$z = \frac{q}{mv_0} A_2$$

dove A_2 è una costante dipendente dal campo magnetico e dal cammino della particella ma indipendente da q , m e v_0 .

E più oltre continua: “Così, tutte le particelle con lo stesso rapporto q/m in presenza di campo elettrico e magnetico colpiscono il piano su una parabola che può essere visualizzata facendo incidere le particelle su una lastra fotografica.”

E ancora: “Poiché la parabola corrispondente all'atomo di idrogeno è presente in praticamente tutte le foto ed è immediatamente riconoscibile [...] è molto facile trovare il valore di q/m per tutte le altre.”

Un esempio di queste foto è riportato nella figura 1:

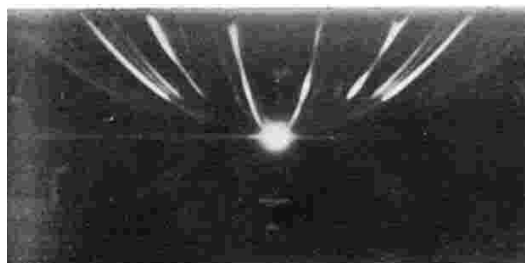


Figura 1

che viene riportata, ingrandita e invertita in colore, nella figura 2:

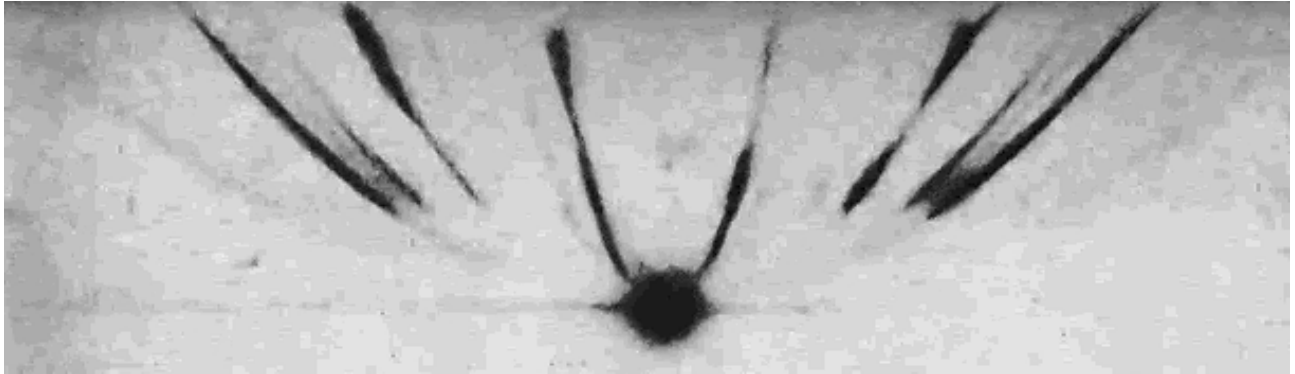
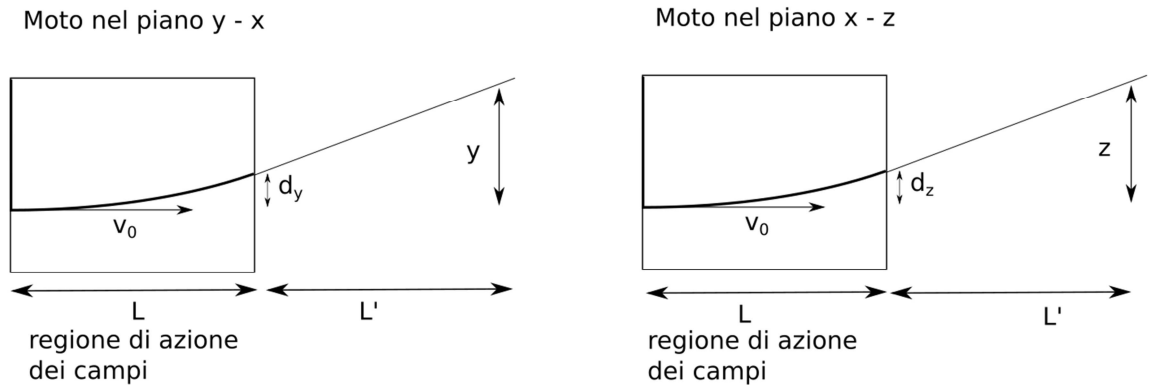


Figura 2

1. Fissando un sistema di riferimento con origine nel punto O ove le particelle colpiscono il piano fluorescente in assenza del campo elettrico e di quello magnetico, l'asse x nella direzione del moto delle particelle e l'asse y nella direzione comune dei campi elettrico e magnetico, dimostra dalle informazioni date la validità delle formule riportate da Thomson per le deflessioni nelle direzioni y e z dovute al campo elettrico e al campo magnetico. Nella dimostrazione assumi che gli effetti di bordo siano trascurabili e che la forza di Lorentz sia sempre diretta nella direzione z .
2. Dimostra che le particelle con lo stesso rapporto q/m formano sul piano $x=0$ una parabola quando è presente contemporaneamente sia il campo elettrico sia quello magnetico; determina l'equazione della parabola in funzione del rapporto q/m e dei parametri A_1 e A_2 .
3. Ricordando che gli ioni di idrogeno hanno il massimo rapporto q/m , individua la parabola dovuta agli ioni di idrogeno. Scegli poi un'altra parabola delle foto e determina il rapporto q/m relativo a questa parabola, in unità dello stesso rapporto q/m per l'idrogeno. Descrivi dettagliatamente il procedimento seguito.
4. Immagina ora di ruotare il campo elettrico in modo che sia diretto nella direzione z e con verso tale da deflettere le particelle in verso opposto alla deflessione dovuta al campo magnetico. Disegna la direzione e verso del campo elettrico e di quello magnetico affinché essi operino come descritto e determina la condizione che deve essere verificata affinché la deflessione totale sia nulla. Ipotizzando di utilizzare il dispositivo come strumento di misura, quale grandezza potrebbe misurare?

Soluzione



Q1. Il moto nella direzione y sotto l'azione del campo elettrico è un moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $\frac{q}{m}E$, velocità iniziale nulla. Lo spostamento nella regione R di azione del campo elettrico vale $d_y = \frac{qE}{2m}t^2$. La componente della forza diretta nella direzione z è¹ qv_0B diretta esclusivamente lungo z e lo spostamento in tale direzione vale quindi $d_z = \frac{qBv_0}{2m}t^2$. Il tempo impiegato per uscire dalla regione di azione del campo, di ampiezza L , è $t = \frac{L}{v_0}$ da cui otteniamo $d_z = \frac{qBL^2}{2mv_0}$, $d_y = \frac{qEL^2}{2mv_0^2}$.

Se la lastra fotografica fosse posta all'uscita di questa regione avremmo ottenuto il risultato di Thomson con $A_1 = \frac{EL^2}{2}A_2 = \frac{BL^2}{2}$.

Se la lastra fosse posta invece all'estrema destra della regione rappresentata nella figura data nel testo, regione in cui non agiscono campi elettrici e magnetici, all'uscita dalla zona di azione dei campi avremmo

$$v_x = v_0 \text{ e } v_y = \frac{qEL}{mv_0}, v_z = \frac{qv_0B}{m} \times \frac{L}{v_0} = \frac{qBL}{m}.$$

Indicando con $t_1 = \frac{L'}{v_0}$ il tempo necessario per arrivare sullo schermo, posto a distanza L' dalla zona di azione, abbiamo

$$y = d_y + v_y t_1 = \frac{qEL^2}{2mv_0^2} + \frac{qEL}{mv_0} \times \frac{L'}{v_0}$$

$$\text{da cui } y = \frac{q}{mv_0^2} A_1 \text{ con } A_1 = \frac{EL^2}{2} + ELL'.$$

¹ In realtà la forza di Lorentz ha direzione variabile e centripeta, ma il testo fornisce chiaramente nella prima domanda indicazioni in tal senso. La giustificazione di questa approssimazione non è richiesta allo studente.

Allo stesso modo è

$$z = d_z + v_z t_1 = \frac{qBL^2}{2mv_0} + \frac{qBL}{m} \times \frac{L'}{v_0}$$

da cui segue la tesi $z = \frac{q}{mv_0} A_2$ identificando opportunamente A_2 .

Q2. Le particelle che entrano nella regione di azione dei campi hanno a priori velocità non note e diverse tra loro. Ricavando v_0 dall'equazione per z e sostituendo nell'equazione per y otteniamo

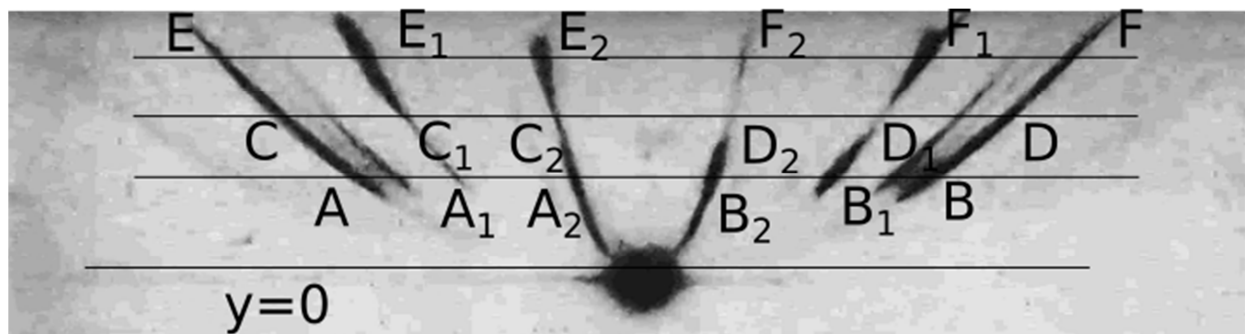
$$v_0 = \frac{qEL^2}{2mz}$$

$$y = \frac{m A_1}{q A_2^2} z^2.$$

Tutte le particelle, a parità di rapporto q/m , indipendentemente dalla loro velocità iniziale, colpiscono quindi la lastra fotografica formando una parabola.

Q3. Il testo afferma che l'idrogeno è l'elemento con q/m maggiore. Infatti tutti gli altri hanno masse maggiori, inclusi gli isotopi deuterio e trizio, e numero di cariche di ionizzazione sicuramente minori del proprio numero di massa (a causa della presenza dei neutroni nel nucleo)².

Prendendo una retta parallela all'asse $z = 0$ di equazione $y = k$ che intersechi le parabole in $z_{1,2}$, troviamo $(z_{1,2})^2 = k \frac{A_2^2}{A_1} \times \frac{q}{m}$. Da ciò si deduce che l'idrogeno, se presente è rappresentato dalla parabola con apertura maggiore. Misurando i valori di $z_{1,2}$ è possibile determinare il rapporto cercato. Per migliorare i dati è possibile misurare i valori di z corrispondenti a diversi valori di k , calcolando la differenza $\delta = z_2 - z_1$ per la



stessa parabola.

Per esempio misurando le distanze tra le coppie di punti riportate nella figura sopra otteniamo i dati riportati nella seguente tabella:

Coppia punti	δ (cm)	Distanza / distanza idrogeno
AB	6.76	1
CD	8.54	1
EF	9.86	1
$A_1 B_1$	4.32	0.41
$C_1 D_1$	5.44	0.41
$E_1 F_1$	6.38	0.42
$A_2 B_2$	1.68	0.063

² Da notare che nell'articolo originale di Thomson si discute la presenza di atomi e molecole cariche negativamente. L'articolo originale è disponibile al link rspa.royalsocietypublishing.org/content/royprsa/89/607/1.full.pdf

C_2D_2	2.02	0.058
E_2F_2	2.38	0.058

I valori richiesti sono quindi $q/m = 0.41$ e $q/m = 0.060$.

Q4. La direzione dei vettore velocità (verso destra in figura), campo elettrico (diretto in verso entrante nella pagina in figura) e campo magnetico (verso l'alto in figura) è rappresentata qui sotto. In questa configurazione le forze dovute al campo elettrico e magnetico sono opposte e dirette lungo z.



Per avere deflessione nulla è sufficiente chiedere che le forze si equilibrino, essendo nulla la velocità iniziale in quella direzione. In queste condizioni il dispositivo funziona da selettore di velocità e avremo $qE = qv_0B$ da cui

$$v_0 = \frac{E}{B}$$

Misurando i campi magnetici ed elettrici possiamo quindi dedurre il valore della velocità v_0 .