

Il ghiaccio

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE ON DEMAND sito nella tua regione. All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione.

Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di prisma retto a base quadrata di volume 10 dm^3 , che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi.

Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1. Studia la funzione che rappresenta la superficie del parallelepipedo in funzione del lato b della base quadrata e rappresentala graficamente;
2. determina il valore di b che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h , e commenta il risultato trovato.

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di -18°C , uniformemente distribuita al suo interno. Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di 10°C ; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente;

3. scegli una delle seguenti funzioni per modellizzare il processo di riscaldamento prima della liquefazione (T_a = temperatura ambiente, T_g = temperatura iniziale del ghiaccio, $T(t)$ = temperatura del ghiaccio all'istante t , dove t = tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):

$$T(t) = (T \quad)e$$

$$T(t) = (T \quad).(1 \quad)$$

$$T(t) = (T \quad)e$$

e determina il valore che deve avere il parametro K , che dipende anche dai processi produttivi, perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente avente la forma di un tronco di cono, con raggio della base minore eguale a 1 dm , raggio della base maggiore eguale a $1,5 \text{ dm}$, e altezza eguale a 2 dm ;

4. sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del $9,05\%$, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.

Soluzione

Punto 1)

La superficie totale del prisma retto a base quadrata è $A_S = 2 \cdot b^2 + 4 \cdot b \cdot h$

$$A_S = 2 b^2 + 4 b h \quad (1)$$

Sapendo che il volume è $V = b^2 \cdot h$

$$V = b^2 h \quad (2)$$

Si ha : $10 \text{ dm}^3 = b^2 h$

$$10 \text{ dm}^3 = b^2 h \quad (3)$$

Ricaviamo l'altezza in funzione di b

$$A_S = 2 \cdot b^2 + \frac{4 \cdot b \cdot 10}{b^2}$$

$$A_S = 2 b^2 + \frac{40}{b} \quad (4)$$

Con b non negativo essendo la misura di un segmento .

Il C.E. della funzione è perciò $b > 0$

In tale insieme non ci sono simmetrie evidenti .

Inoltre è una funzione sempre positiva, nel suo insieme di definizione, perchè somma di quantità sempre positive.

Intersezioni con gli assi.

(5)

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \left(2 b^2 + \frac{40}{b} \right) = +\infty \quad \text{Asintoto verticale } b=0 \text{ da destra}$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(2 b^2 + \frac{40}{b} \right) = +\infty \quad \nexists \text{ asintoto orizzontale}$$

$$m = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(2 b + \frac{40}{b^2} \right) = +\infty \quad \nexists \text{ asintoto obliquo}$$

Calcolo la derivata prima

$$\text{diff} \left(2 b^2 + \frac{40}{b}, b \right)$$

$$4 b - \frac{40}{b^2} \quad (6)$$

La pongo uguale a 0

(7)

(8)

ottengo

(9)

per $b > \sqrt[3]{10}$ la superficie cresce

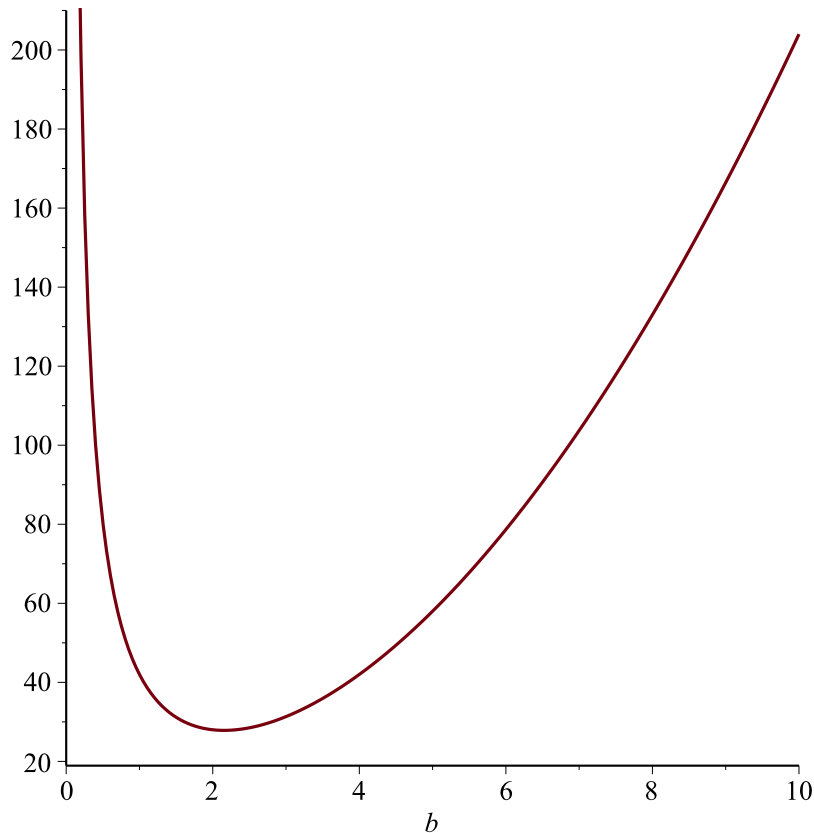
per $0 \leq b < \sqrt[3]{10}$ la superficie decresce

per $b = \sqrt[3]{10}$ la superficie esposta sarà minima e vale

(10)

$$\min \left(\sqrt[3]{10}, 6 \cdot \sqrt[3]{10^2} \right)$$

$$\text{plot} \left(2 \cdot b^2 + \frac{40}{b}, b = 0 \dots 10 \right)$$



Punto 2

Il blocco scambierà calore attraverso la superficie (prima ipotesi aggiuntiva, scambio solo per conduzione), supponendo che sia coinvolta tutta la superficie, anche quella relativa alla base di appoggio (seconda ipotesi aggiuntiva), si ha:

$$A_s = 2 \cdot b^2 + \frac{4 \cdot b \cdot 10}{b^2}$$

$$A_s = 2b^2 + \frac{40}{b} \quad (11)$$

Dal precedentemente studio di questa funzione abbiamo visto che per $b = \sqrt[3]{10}$ la superficie esposta sarà minima e conseguentemente sarà minimo lo scambio termico.

Per tale valore di b l'altezza del blocco sarà
$$h = \frac{10}{\left(\sqrt[3]{10}\right)^2}$$

$$h = 10^{1/3} \quad (12)$$

Si può dedurre quindi che lo scambio termico sarà minimo quando il blocco avrà la forma di un cubo .

Punto 3

Poichè il blocco tende a riscaldarsi, in funzione della differenza di temperatura tra il ghiaccio e l'ambiente,

per determinare quale funzione modella il processo, consideriamo le tre funzioni

$$T(t) = (T_g - T_a)e^{-Kt}$$

$$T(t) = (T_a - T_g) \cdot (1 - e^{-Kt}) + T_g \quad e$$

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{-Kt} - T_a$$

mettiamo al posto di $T_g = -18^\circ$, $T_a = 10^\circ$ ed esaminiamo i modelli matematici forniti

nel primo caso si ha

$$T(t) = -28 \cdot \exp(-t \cdot k)$$

$$T(t) = -28 e^{-tk} \quad (13)$$

verifichiamo se è soddisfatta la condizione iniziale per cui per $t=0$ la temperatura del ghiaccio deve essere -18°C

$$T(0) = -28 e^{-0 \cdot k}$$

$$T(0) = -28 \quad (14)$$

la funzione **non verifica le condizioni iniziali**, calcoliamo anche le condizioni finali asintotiche per $t \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (-28 \cdot \exp(-t \cdot k)) = 0$$

valore che **non corrisponde** al raggiungimento asintotico della temperatura ambiente (10°). **Funzione non adeguata a modellizzare il fenomeno.**

nel secondo caso si ha

$$T(t) = 28 \cdot (1 - \exp(-t \cdot k)) - 18$$

$$T(t) = 10 - 28 e^{-tk} \quad (15)$$

la funzione è crescente infatti la sua derivata prima $T'(t) = 28 k e^{-tk} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

verifichiamo se soddisfa la condizione iniziale

$$T(0) = 10 - 28 e^{-0 \cdot k}$$

$$T(0) = -18 \quad (16)$$

La condizione iniziale è verificata, occorre verificare anche se sono soddisfatte le condizioni asintotiche finali:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (28 \cdot (1 - \exp(-t \cdot k)) - 18) = 10$$

valore che **corrisponde** al raggiungimento asintotico della temperatura ambiente (10°). **Funzione adeguata a modellizzare il fenomeno.**

nel terzo caso (esaminato a verifica della correttezza del risultato precedente) si ha

$$T(t) = 28 \cdot \exp(-t \cdot k) - 10$$

$$T(t) = 28 e^{-tk} - 10 \quad (17)$$

la sua derivata prima rispetto a t è

$T'(t) = -28 k e^{-tk} < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ quindi la funzione è sempre decrescente e **quindi non adeguata a modellizzare il fenomeno**

perchè la temperatura cresce in un processo di riscaldamento (non occorre verificare le condizioni iniziali e finali asintotiche).

$$T(t) = 28 e^{-tk} - 10 \quad (18)$$

Scelta perciò la funzione $T(t) = 10 - 28 e^{-tk}$

affinchè il blocco non inizi a fondere nei 2 minuti necessari al percorso verso il camion frigorifero, deve essere verificata la condizione

$$T(2) \leq 0^\circ$$

$$10 - 28 e^{-tk} \leq 0$$

$$-28 e^{-tk} \leq -10 \quad (19)$$

$$e^{-tk} \geq \frac{10}{28}$$

$$\frac{5}{14} \leq e^{-tk} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 e^{-t \cdot k} &\geq \frac{5}{14} \\
 -t \cdot k &\geq \ln\left(\frac{5}{14}\right) \\
 \text{per } t=2 \\
 k &\leq -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{5}{14}\right) \\
 \text{evalf}\left(k \leq -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{5}{14}\right), 2\right) \\
 k &\leq 0.50 \quad (21)
 \end{aligned}$$

Punto 4

Per risolvere il quesito 4 calcoliamo il volume del recipiente avente la forma di tronco di cono

$$\begin{aligned}
 V &\approx \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (1.5^2 + 1 + 1.5) \cdot 2 \\
 V &\approx (3.166666666 \pi) \quad (22)
 \end{aligned}$$

(23)

Per calcolare il volume di acqua necessaria per produrre ciascun blocco vale la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
 V_a + \frac{a}{100} \cdot 9.05 &= 10 \\
 1.090500000 V_a &= 10 \quad (24)
 \end{aligned}$$

(25)

Poichè $V_a \approx 9.17$ è minore del volume del recipiente $V \approx (9.951)$ quest'ultimo è in grado di contenere l'acqua necessaria a costruire il blocco di ghiaccio.

Poichè il volume del tronco di cono si ottiene con la formula

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 + r^2 + r \cdot R) \cdot h \quad \text{per trovare l'altezza raggiunta dall'acqua nel contenitore}$$

$$\text{si ha } h = \frac{V}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 + r^2 + r \cdot R)}$$

$$h = \frac{9.17}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (1.5^2 + 1 + 1.5)}$$

$$h = \frac{5.791578949}{\pi} \quad (26)$$

(27)

L'acqua raggiungerà un'altezza dal fondo pari a 1,84 dm.