Curva nord

Sei il responsabile della gestione del settore "Curva Nord" dell'impianto sportivo della tua città e devi organizzare tutti i servizi relativi all'ingresso e all'uscita degli spettatori, nonché alla sicurezza e all'assistenza agli spettatori stessi. La forma del settore sotto la tua gestione è una porzione di corona circolare come rappresentata in figura 1.

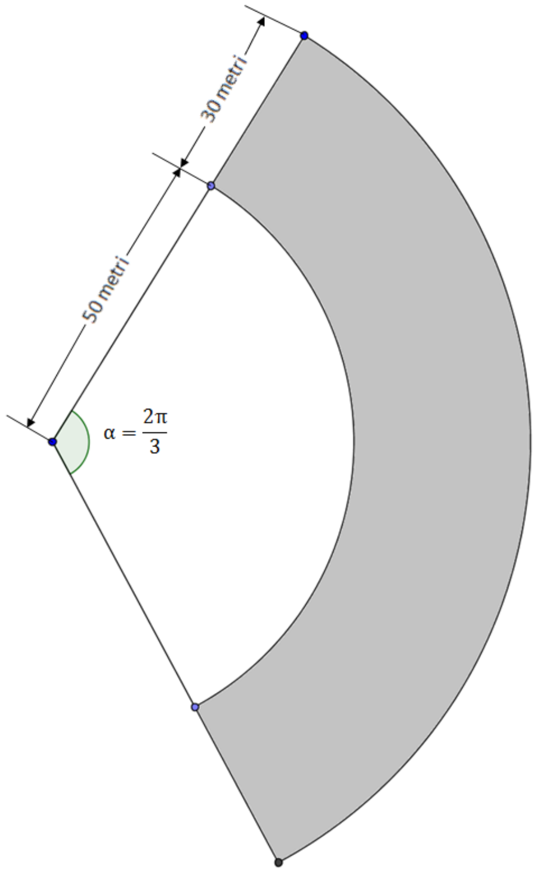


Figura 1

Tenendo presente che le normative di sicurezza emanate dal Comune prevedono un indice di affollamento massimo di 3,25 persone/m^2, e che il 9,5% della superficie della "Curva Nord" è inagibile in quanto necessita di lavori di manutenzione,

1) determina la capienza massima N_{max} attuale del settore "Curva Nord", approssimata alle centinaia.

La Polizia Municipale propone di aprire i cancelli di ingresso un'ora prima dell'inizio della manifestazione sportiva. È necessario non aprirli con troppo anticipo, per limitare i costi, ma anche evitare un afflusso troppo intenso, per motivi di sicurezza: la velocità massima di accesso degli spettatori non deve essere superiore a 350 ingressi al minuto. In base alle osservazioni degli anni precedenti, sai che l'andamento del numero di spettatori, aprendo gli ingressi un'ora prima dell'inizio della manifestazione, segue una curva come quella riportata in figura 2:

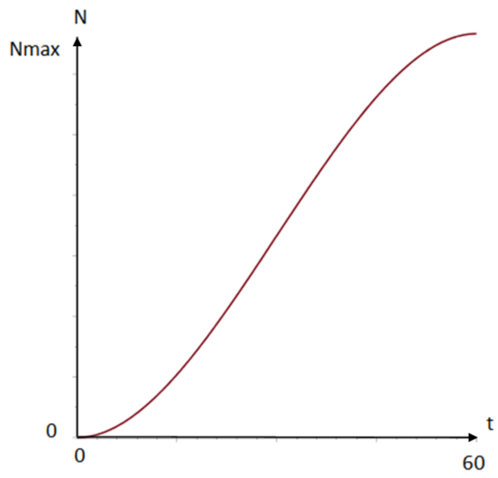


Figura 2

2) esprimendo il tempo *t* in minuti, determina il polinomio *p(t)* di terzo grado che meglio riproduce questo andamento, ipotizzando che il numero di spettatori sia 0 all'apertura dei cancelli di ingresso (t = 0) e sia pari al numero massimo consentito N_{max} dopo un'ora ($t = 60$), e che la velocità di accesso sia 0 al momento dell'apertura iniziale degli ingressi, e sia ancora 0 dopo un'ora, quando l'afflusso termina e il settore è riempito completamente. Verifica che la funzione rispetti il vincolo di sicurezza sulla massima velocità di accesso degli spettatori nello stadio.

Al termine della manifestazione gli spettatori defluiscono dall'impianto; in base alle osservazioni degli anni scorsi ogni minuto esce dall'impianto il 5% degli spettatori presenti all'interno nel minuto precedente.

3) Determina la funzione che meglio rappresenta il deflusso degli spettatori, e, indicando con t=0 l'apertura dei cancelli e t_c (da determinare) l'istante in cui, durante il deflusso, nell'impianto restano meno di 100 spettatori, disegna il grafico della funzione che rappresenta il numero di spettatori presenti nell'impianto nell'intervallo $[0;\ t_c]$; ipotizza che l'impianto sia riempito alla massima capienza e che la manifestazione sportiva duri un'ora. Determina inoltre la massima velocità di deflusso degli spettatori dall'impianto.

Devi organizzare i servizi di assistenza e ristoro per gli spettatori, sulla base del numero medio di presenze nell'impianto.

4) Determina il numero medio di spettatori presenti nell'impianto, nell'intervallo di tempo dall'istante $t = 0$ (apertura dei cancelli) all'istante $t = t_c$

Soluzione

Quesito 1:

L'area S della curva nord è data dall'espressione:

$$\mathbf{S = \frac{\alpha}{2}(R_2^2 - R_1^2) = \frac{2\pi}{6}(80^2 - 50^2) = 4084\ m^2}$$

L'area agibile $S_{eff.}$ è il 90,5% del totale e pertanto sarà $S_{eff.}$ = 3696 m^2

Il numero massimo di spettatori N_{max} sarà:

$$N_{\max} = 3{,}25 * S_{eff} = 12000$$

Quesito 2:

Indicando con N(t) il numero di spettatori all'interno dello stadio all'istante t espresso in minuti, risulta:

$$N(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$
$$N(t=0) = 0 \Rightarrow d = 0$$
$$\dot{N}(t=0) = 0 \Rightarrow 3at^2 + 2bt + c = 0 \Rightarrow c = 0$$
$$\dot{N}(t=60) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 60^2 + 2b \cdot 60 = 0 \Rightarrow a = -{}^{2b}\!/_{3\cdot 60} = -\frac{b}{90}$$
$$N(t=60) = N_{\max} \Rightarrow a \cdot 60^3 + b \cdot 60^2 = N_{\max} \Rightarrow$$
$$\left(-\frac{b}{90}\cdot 60 + b\right) = \frac{N_{\max}}{60^2} \Rightarrow b = \frac{3 \cdot N_{\max}}{60^2} = 10 \ \Rightarrow a = -\frac{1}{9}$$

quindi $N(t) = -\frac{1}{9}t^3 + 10t^2$

Verifichiamo che il flusso non superi il massimo consentito; per questo determiniamo il valore del massimo della derivata prima della funzione N(t):

$$\ddot{N}(t) = 6at + 2b = 0 \Rightarrow t = -{}^{b}\!/_{3a} = 30 \ \ \min$$
$$\dot{N}(t=30) = 3a \cdot 30^2 + 2b \cdot 30 = 300 \ \ spettatori/\min$$

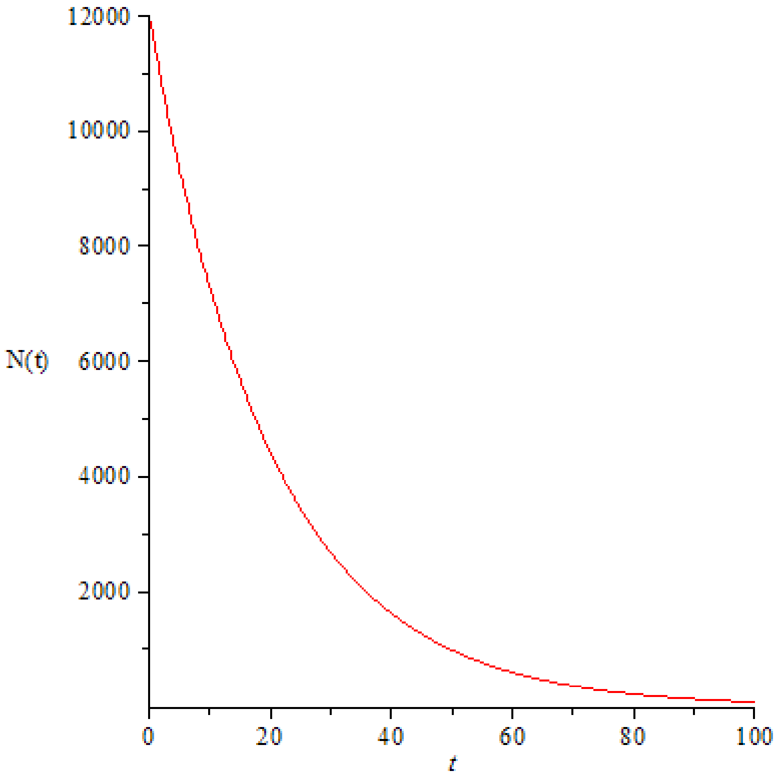
Il flusso quindi è minore del massimo possibile per motivi di sicurezza.

<u>Prima ipotesi soluzione quesito 3 e 4:</u>

Indichiamo con t_0 il tempo a cui la manifestazione termina e inizia il deflusso; questo è descritto dalla relazione:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -0{,}05N(t) = -\frac{N(t)}{20} \Rightarrow N(t) = N_{\max} e^{-(t-t_0)/20}$$

Il grafico della funzione è il seguente:



Il valore di t_0 è $t_0 = 120$ minuti. Il tempo cercato t_c è:

$$N(t_c) = N_{\max} e^{-(t_c - t_0)/20} = 100 \Rightarrow t_c - t_0 = -20 \cdot \ln \frac{100}{N_{\max}} = 95{,}8 \min \Rightarrow t_c = 215{,}7 \min$$

Il deflusso ha il massimo all'inizio del deflusso stesso ed è pari al 5% del numero degli spettatori e quindi pari a 600 spettatori/minuto.

Il numero medio di spettatori nell'impianto è: $\overline{N} = \frac{1}{t_c} \int_0^{t_c} N(t)dt$

La funzione N(t) ha tre andamenti diversi negli intervalli (0,60); (60,120) e (120,216) minuti; pertanto:

$$\overline{N} = \frac{1}{t_c} \int_0^{t_c} N(t)dt = \frac{1}{t_c} \left(\int_0^{60} N(t)dt + \int_{60}^{120} N(t)dt + \int_{120}^{216} N(t)dt \right)$$

Nel primo intervallo $\int_0^{60} N(t)dt = \frac{a \cdot t^4}{4} + \frac{b \cdot t^3}{3} = 360000$

Nel secondo intervallo: $\int_{60}^{120} N(t)dt = N_{\max} * 60 = 720000$

Nel terzo infine: $\int_{120}^{216} N(t)dt = 20 \cdot N_{\max} \left(1 - e^{-96/20} \right) = 238025$

Il numero medio di spettatori sarà quindi:

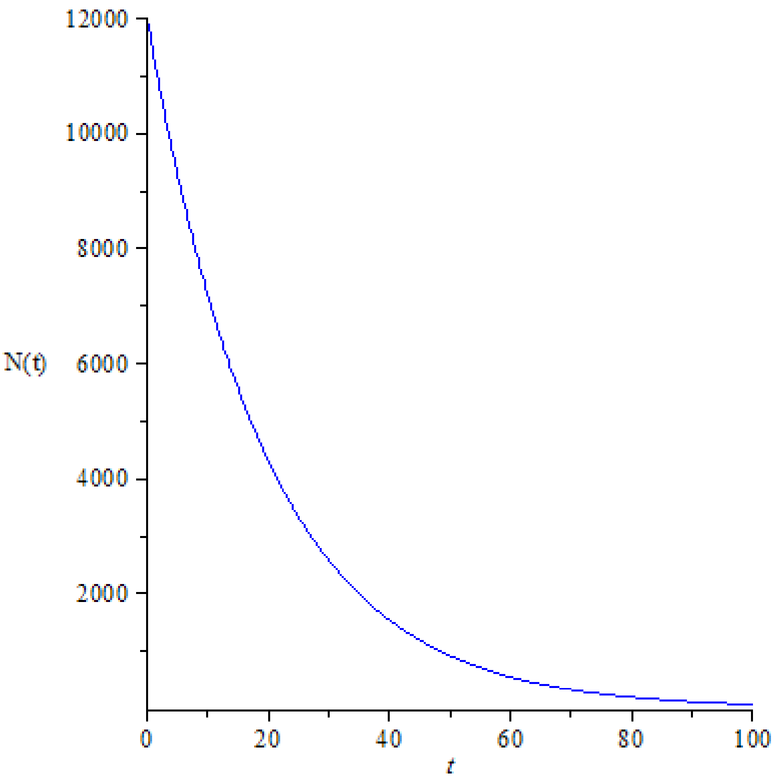
$$\overline{N} = \frac{1}{216}(360000 + 720000 + 238025) = 6102$$

<u>Seconda ipotesi soluzione quesito 3 e 4:</u>

Indicando con N_{max} il numero di spettatori presenti al termine della manifestazione, poiché in ogni minuto defluisce il 5% degli spettatori presenti un minuto prima, in ogni minuto il numero di spettatori ancora presenti all'interno dell'impianto è il 95% di quelli presenti un minuto prima.

Quindi $N(t_i) = N(t_{i-1}) \cdot 0{,}95$, e quindi $N(t_i) = N_{\max} \cdot 0{,}95^i$

Andamento della funzione $N(t) = 12000 \cdot 0{,}95^{t-t_0}$



Perché il numero di spettatori diventi inferiore a 100, devono trascorrere:

$$t_c . t_0 \geq \log_{0,95} \frac{100}{N_{\max}} = 93{,}3\min \rightarrow t_c = 213{,}3\min$$

Il numero medio di spettatori nell'impianto è: $\overline{N} = \frac{1}{t_c}\int_0^{t_c} N(t)dt$

La funzione N(t) ha tre andamenti diversi negli intervalli (0,60); (60,120) e (120,214) minuti; pertanto:

$$\overline{N} = \frac{1}{t_c}\int_0^{t_c} N(t)dt = \frac{1}{t_c}\left(\int_0^{60} N(t)dt + \int_{60}^{120} N(t)dt + \int_{120}^{214} N(t)dt\right)$$

Nel primo intervallo $\int_0^{60} N(t)dt = \frac{a \cdot t^4}{4} + \frac{b \cdot t^3}{3} = 360000$

Nel secondo intervallo: $\int_{60}^{120} N(t)dt = N_{\max} * 60 = 720000$

Nel terzo infine: $\int_{120}^{214} N(t)dt = \frac{N_{\max}}{\ln(0,95)}(0,95^{94} - 1) = 232064$

Il numero medio di spettatori sarà quindi:

$$\overline{N} = \frac{1}{214}(360000 + 720000 + 232064) = 6131$$

<u>**Nota :**</u> Modellizzando l'uscita degli spettatori con la funzione $N(t) = 12000 \cdot 0,95^{t-t_0}$ il numero medio risulta essere 6131 anziché 6102 che si ottiene con la funzione $N(t) = 12000 \cdot e^{-(t-t_0)/20}$, entrambe le curve sono sovrapponibili nell'andamento e le due soluzioni per $\overline{N}$ hanno uno scarto dello 0,47%