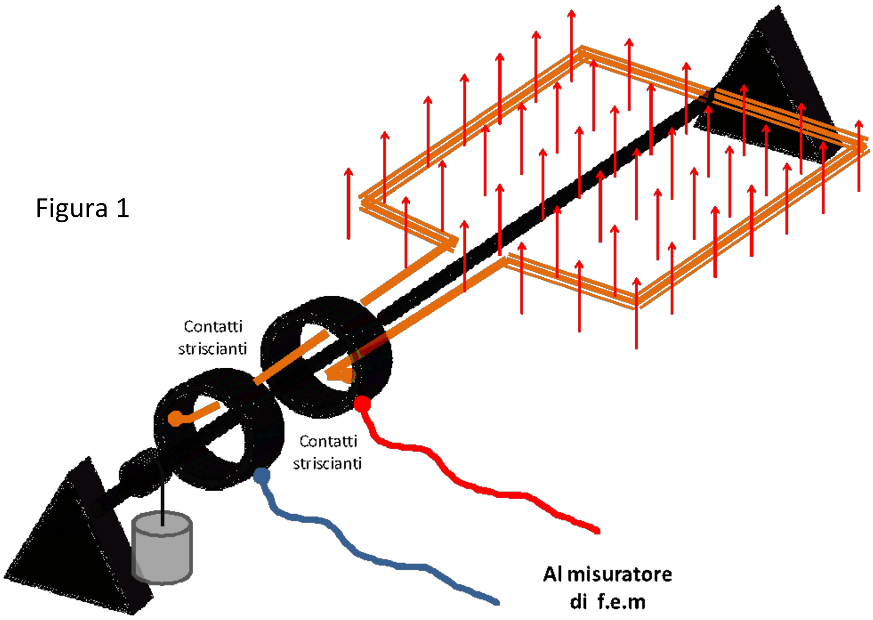
Bobina ruotante

In laboratorio è stato preparato il dispositivo rappresentato in figura1. La bobina è costituita da 100 spire rettangolari di rame i cui lati misurano 25 cm e 30 cm. La bobina può ruotare con attrito trascurabile intorno al suo asse e, durante la rotazione, le estremità del filo strisciano su due anelli conduttori, mantenendo con essi un contatto elettrico. La bobina è immersa in un campo magnetico uniforme e costante.
Sull'asse della bobina è montato un cilindro intorno al quale è avvolto un filo. All'estremità del filo è sospeso un pesetto. Quando il pesetto viene lascito libero, cade verso il basso mettendo in rotazione la bobina. Alla partenza del pesetto il piano della spira è perpendicolare alla direzione del campo magnetico.
Durante la rotazione della bobina, alle sue estremità, che restano aperte in modo che non circoli corrente, si produce una f.e.m. il cui valore viene rilevato da un sistema di acquisizione automatico che acquisisce 1000 valori al secondo.
In figura 2 sono stati riportati i dati sperimentali acquisiti dal sistema. Questo grafico rappresenta in ordinata la f.e.m. prodotta alle estremità della bobina durante la caduta del pesetto ed in ascissa il tempo.
La figura 3 rappresenta lo stesso grafico di figura 2. In quest'ultimo grafico i punti sperimentali sono stati uniti da segmenti per migliorarne la leggibilità.

Figura 1



1 – Spiega il fenomeno fisico per il quale si produce la f.e.m. all'estremità della bobina e, sulla base di esso, spiega il particolare andamento del grafico sperimentale.

2 – Utilizza la legge del fenomeno fisico per dedurre teoricamente la funzione matematica y= f(t) che descrive la f.e.m. alle estremità della bobina in funzione del tempo e verifica che la funzione ottenuta, coerentemente con il grafico sperimentale, abbia ampiezza crescente e periodo decrescente. Considera l'intensità del campo magnetico B e l'accelerazione angolare α della bobina come parametri. Considera inoltre aperte le estremità della bobina.

3 – Deduci dal grafico sperimentale le informazioni quantitative necessarie per determinare il valore dell'accelerazione angolare della bobina e l'intensità del campo magnetico in cui ruota la bobina.

4 – Spiega qual è il significato fisico dell'area, evidenziata in figura 3, compresa tra ogni semiperiodo e l'asse dei tempi. Verifica, tramite la funzione y=f(t), che queste aree hanno, in modulo, tutte lo stesso valore.

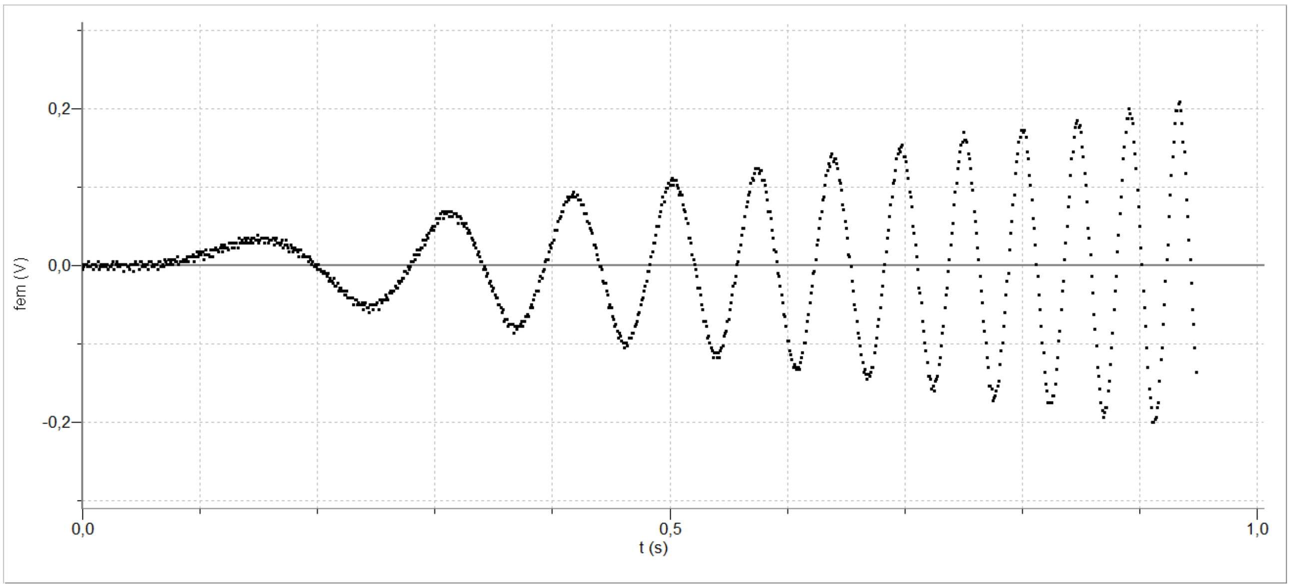


figura 2

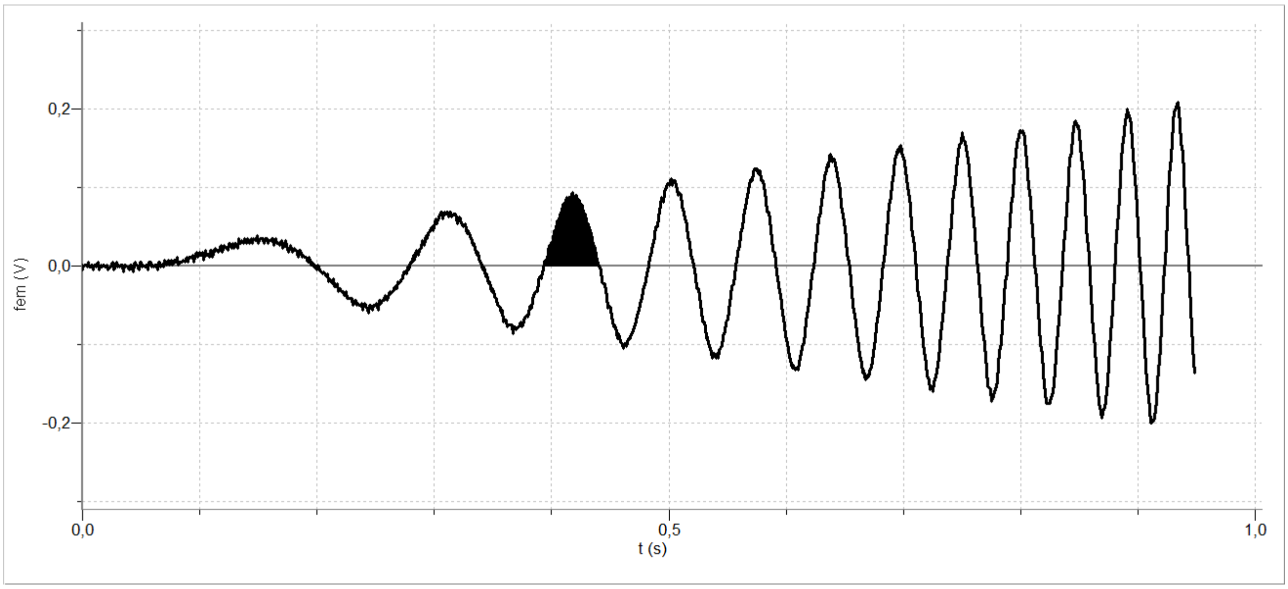


figura 3

Soluzione

Punto 1

Il fenomeno sulla base del quale si produce una f.e.m. alle estremità della bobina quando questa viene messa in rotazione, è quello della induzione elettromagnetica. Questo fenomeno consiste nel fatto che quando si verifica una variazione del flusso del campo magnetico concatenato con un circuito, in questo si induce una f.e.m. la cui intensità è tanto maggiore quanto più rapidamente avviene la variazione del flusso.
La legge che descrive questo fenomeno è la legge di Faraday – Neuman, espressa dalla relazione:

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi(\boldsymbol{B})}{dt}$$

Il segno negativo deriva dalla legge di Lenz per la quale la corrente indotta ha verso tale da opporsi alla variazione del flusso.
Il flusso del campo magnetico concatenato ogni spira è dato da:

$$\Phi(\mathrm{B}) = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} = B\ S\ cos\theta$$

in cui θ è l'angolo tra il vettore superficie **S** il vettore campo magnetico **B**.
Nella situazione descritta dal nostro problema, la forza peso agente sul pesetto produce un momento meccanico che fa ruotare la spira con accelerazione angolare costante.
Durante mezzo giro della bobina ($0 < \theta < 180°$) la f.e.m. risulta positiva perché $\cos\theta > 0$, durante l'altro mezzo giro ($180° < \theta < 360°$) la f.e.m. risulta negativa perché $\cos\theta < 0$. La conseguenza è che la f.e.m. ai capi della spira è alternata così come mostrato dal grafico sperimentale.
Il grafico mostra che questa f.e.m. alternata ha un periodo decrescente e un'ampiezza crescente. Queste due caratteristiche del grafico sperimentale derivano dal fatto che il moto della bobina avviene con accelerazione angolare costante.
Poiché il periodo di rotazione della bobina decresce con il passare del tempo, anche il periodo della f.e.m. indotta decresce.
Il fatto che la rapidità della rotazione va aumentando con il tempo, implica che anche la rapidità con cui varia il flusso concatenato va aumentando e, in accordo con legga di Farady – Neuman, aumenta l'intensità della f.e.m., come mostrato dal grafico sperimentale.

Punto 2

Per determinare la funzione matematica y= f(t) che descrive la f.e.m. alle estremità della bobina in funzione del tempo, occorre calcolare l'espressione del flusso del campo magnetico concatenato con la bobina in funzione del tempo e derivare questa espressione rispetto al tempo.
Essendo la bobina è costituita da N spire, il flusso di B con essa concatenato è:

$$\Phi(\mathrm{B}) = N(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}) = N\ B\ S\ cos\theta$$

Il moto della bobina è circolare uniformemente accelerato e, poiché parte da ferma, l'angolo θ varia nel tempo secondo la relazione:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Pertanto la f.e.m. è data da:

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi(\boldsymbol{B})}{dt} = -\frac{d[NBScos(\frac{1}{2}\alpha t^2)]}{dt} = \alpha NBStsen(\frac{1}{2}\alpha t^2)$$

La funzione ottenuta

$$f.e.m. = \alpha NBS\ t\ sen(\frac{1}{2}\alpha t^2)$$

può essere scritta nella forma

$$f.e.m. = Asen(\theta)$$

con

$$A = \alpha NBSt \quad \text{e} \quad \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

I parametri α, N, B e S sono, nel nostro caso, tutti costanti, essendo t l'unica variabile. Il grafico di questa funzione risulta, pertanto, una sinusoide la cui ampiezza A varia in misura direttamente proporzionale al tempo t. Si tratta cioè una sinusoide la cui ampiezza è modulata da una retta passante per l'origine degli assi.
Per quanto riguarda il periodo della funzione

$$f(t) = sen(\frac{1}{2}\alpha t^2)$$

questo può essere calcolato come l'intervallo di tempo T che soddisfa alla condizione:

$$f(t+T) = f(t)$$

da cui:

$$sen\left[\frac{1}{2}\alpha(t+T)^2\right] = sen(\frac{1}{2}\alpha t^2)$$

$$\frac{1}{2}\alpha(t+T)^2 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + 2\pi$$

dopo qualche passaggio si ottiene, per T, l'equazione

$$\frac{1}{2}\alpha T^2 + \alpha t T - 2\pi = 0$$

Questa equazione ha due soluzioni delle quali ci interessa solo quella positiva:

$$T = \sqrt{t^2 + 4\pi/\alpha} - t$$

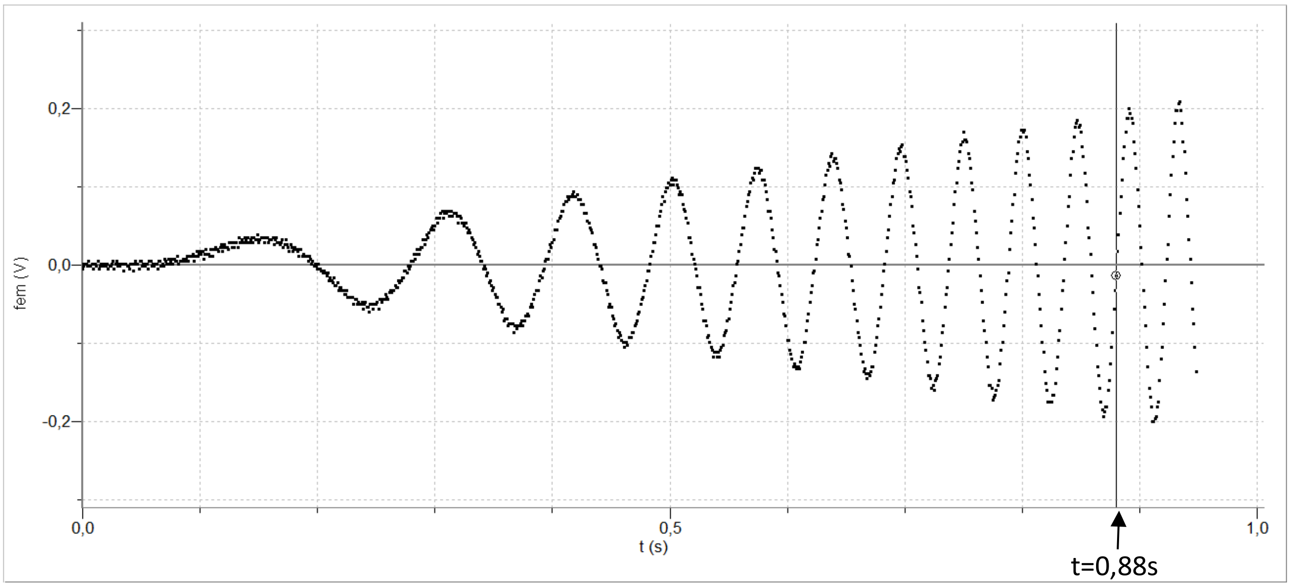
Per verificare che il periodo è decrescente calcoliamo la sua derivata T' rispetto a t:

$$T' = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4\pi/\alpha}} - 1$$

Si osserva che il denominatore della frazione è maggiore del numeratore. Pertanto la frazione risulta minore di 1 e T' risulta negativa. Questo significa che il periodo della nostra funzione è, coerentemente con il grafico sperimentale, sempre decrescente.

Punto 3

Per determinare l'accelerazione angolare della bobina possiamo utilizzare la relazione $\theta = 1/2\ \alpha\ t^2$. Poiché ogni periodo corrisponde ad una rotazione completa della bobina, si misura sul grafico sperimentale il tempo impiegato dalla bobina per compiere un certo numero di rotazioni complete, ad esempio 10 rotazioni.



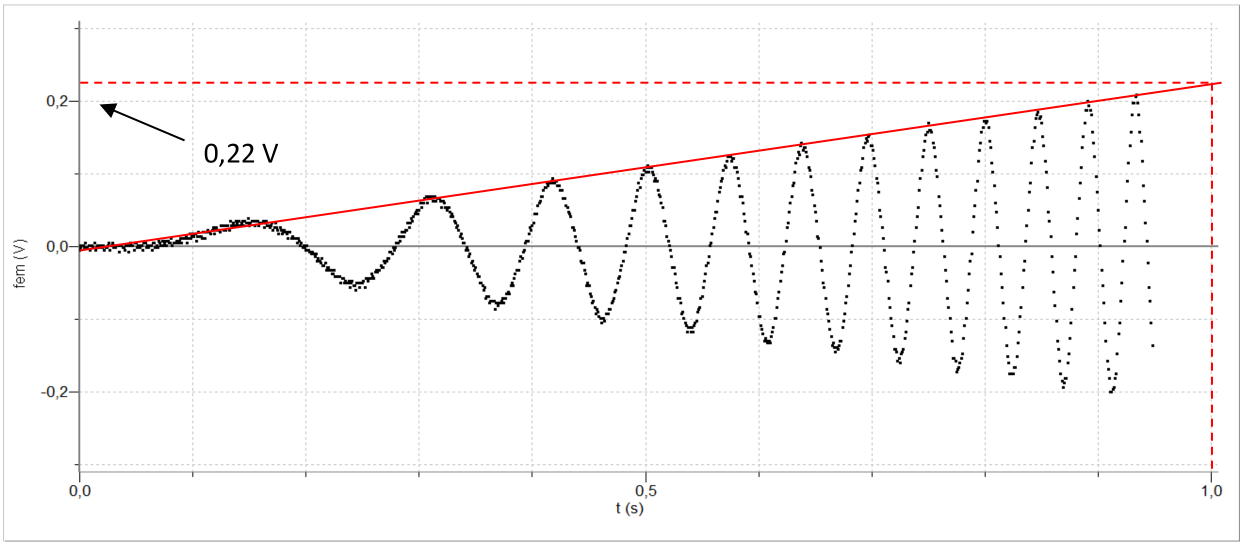
Questo tempo risulta essere t=0,88s. In questo tempo la bobina ha descritto un angolo di 20π radianti, 2π radianti per ogni giro. L'accelerazione angolare della bobina risulta essere:

$$\alpha = \frac{2\theta}{t^2} = \frac{2 \cdot\ 20\pi\ rad}{(0{,}88s)^2} = 162\ rad/s^2$$

Per determinare l'intensità del campo magnetico si può utilizzare il fatto che, secondo il modello elaborato, l'ampiezza della sinusoide è modulata dalla retta di equazione

$$y = \alpha NBSt$$

il cui coefficiente angolare è m = α N B S.
Il valore del coefficiente angolare m può essere dedotto dal grafico sperimentale disegnando la retta che passa per i massimi della funzione e valutando la sua pendenza.



Considerato sulla retta il punto di ascissa t=1s, si misura la corrispondente ordinata, che risulta y=0,22V. Il coefficiente angolare della retta è:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{0{,}22\ V}{1s} = 0{,}22\ V/s$$

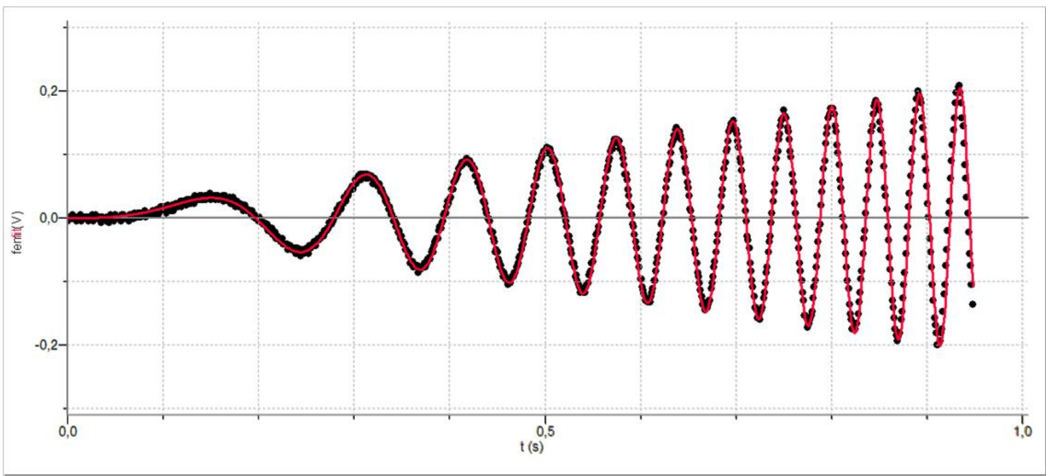
Possiamo ora calcolare l'intensità del campo magnetico:

$$B = \frac{\mathrm{m}}{\alpha\mathrm{NS}} = \frac{0{,}22\ V/s}{162\ rad/s^2 \cdot 100 \cdot 0.25m \cdot 0.30m} = 1{,}81 \cdot 10^{-4}T$$

Determinati i valori di tutti i parametri, la funzione che descrive l'andamento dei dati sperimentali può essere scritta come:

$$f.e.m. = (0{,}22\ rad \cdot T/s) \cdot t \cdot sen(81 rad/s^2 \cdot t)$$

Il grafico di questa funzione, sovrapposto a quello dei dati sperimentali è il seguente:



Se ne deduce che la nostra funzione rappresenta un'ottima approssimazione dei dai sperimentali.

Punto 4

L'area compresa tra la curva e l'asse dei tempi in un qualsiasi semiperiodo, rappresenta la variazione che il flusso del campo magnetico concatenato con la bobina subisce durante mezza rotazione della bobina stessa. Infatti, partendo dalla legge di Faraday – Neuman – Lenz

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi(\boldsymbol{B})}{dt}$$

Si ha:

$$d\Phi(\boldsymbol{B}) = -(f.e.m.)dt$$

$d\Phi(B)$ è quindi l'area del rettangolo la cui altezza ha il valore della f.e.m. e la cui base ha larghezza infinitesima dt.
L'area complessiva $\Delta\Phi(B)$ corrispondente ad un intervallo Δt, si ottiene integrando $d\Phi(B)$ in quell'intervallo:

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{B}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} -(f.e.m.)dt$$

dove t_k e t_{k+1} gli istanti di inizio e fine di Δt. Se questi estremi corrispondono con gli istanti in cui inizia e finisce il k-esimo semiperiodo, allora il precedente integrale misura la variazione di flusso che si verifica durante mezzo giro della bobina. Nei diversi semiperiodi questa variazione di flusso deve avere, in modulo, sempre lo stesso valore. Quello che cambia è solo la velocità con cui avviene la variazione di flusso.
Ci si aspetta quindi che tutte queste aree abbiano lo stesso valore.
Calcoliamo preliminarmente t_k e t_{k+1} che corrispondono a due zeri consecutivi della funzione.
Data la funzione

$$f.e.m. = \alpha NBSt\ sen(\frac{1}{2}\alpha t^2)$$

i suoi zeri si ottengono risolvendo l'equazione

$$\alpha NBSt\ sen\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) = 0$$

Uno zero della funzione si ha per t=0. Per gli altri zeri della funzione occorre risolvere l'equazione

$$sen\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) = 0$$

da cui

$$\frac{1}{2}\alpha t^2 = k\pi$$

$$t_{k=}\sqrt{2k\pi/\alpha}$$

con k numero intero.

Possiamo ora calcolare l'area di un generico semiperiodo come

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{B}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} -(f.e.m.)dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} -\alpha NBSt\, sen(\frac{1}{2}\alpha t^2)dt$$

Questo integrale è facilmente riconducibile ad un integrale immediato che, risolto, fornisce

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{B}) = [NBS\cos(\frac{1}{2}\alpha t^2)]_{t_k}^{t_{k+1}}$$

Utilizzando per t_k l'espressione calcolata precedentemente si ha:

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{B}) = NBS[\cos(k+1)\,\pi - \cos(k\pi)]$$

Se k è un intero pari, risulta

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{B}) = -2NBS$$

che corrisponde all'area di un qualsiasi semiperiodo in cui la funzione è negativa.
Se k è un intero dispari, risulta

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{B}) = +2NBS$$

che corrisponde all'area di un qualsiasi semiperiodo in cui la funzione è positiva.
In entrambi i casi il modulo di $\Delta\Phi$(**B**) è lo stesso, come richiesto per il nostro modello.