Problema Gruppo 5c

UNA FESTA …ELETTRIZZANTE

Un brillante studente di matematica dell'ultimo anno di liceo, durante la tua festa di compleanno, decide di studiare la funzione $f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = ax^2 e^{-bx} + cx,$$

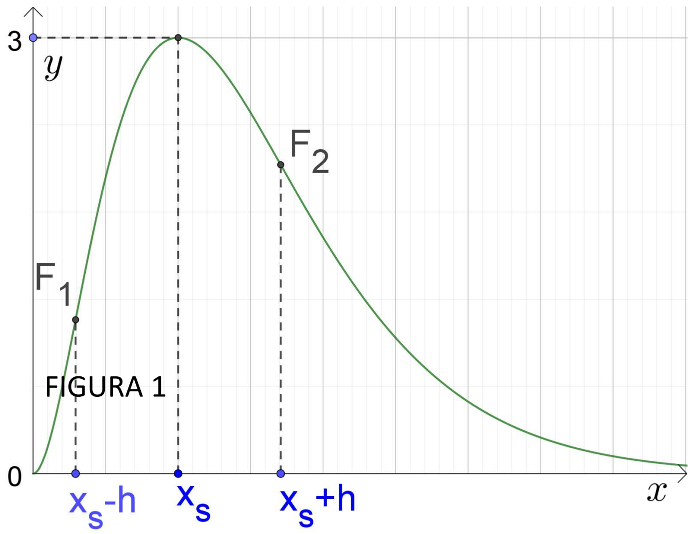
in cui $a, b, c \in \mathbb{R}$, con a $\neq 0$ e $b > 0$, sono parametri da determinare.

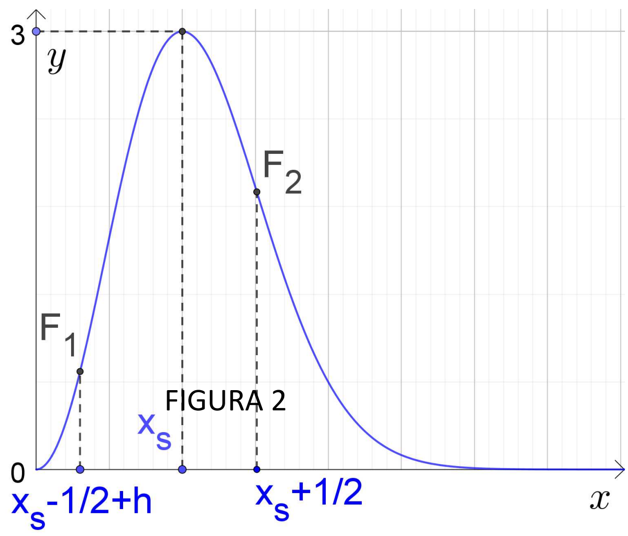
a) Aiutalo a determinare i parametri b e c in modo che il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ tenda ad un numero reale diverso da zero quando x tende a $+\infty$, con $g(x) = (x^2 - x)e^{-2x}$. Spiega perché c deve essere necessariamente nullo.

b) Ricava il valore del parametro a sapendo che la funzione assume il valore 3 nel punto stazionario x_s di ascissa positiva.

c) La funzione così individuata possiede un punto di massimo assoluto? Fornisci una spiegazione analitica esauriente.

Osserva i seguenti due grafici:



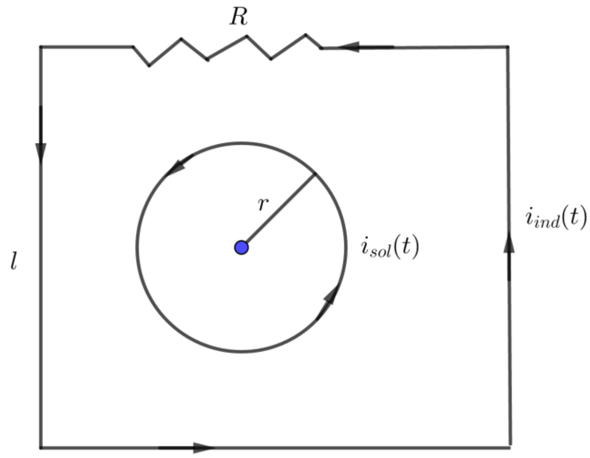


dove F_1 e F_2 sono punti di flesso e h un opportuno valore reale positivo.

d) Sapendo che $b = 2$, stabilisci quale dei due grafici rappresenta quello della funzione $y = f(x)$ precedentemente determinata, argomentando in modo dettagliato il metodo seguito, e calcola il valore di h riferito in figura.

All'apertura dei regali trovi un filo conduttore e un solenoide. Per stupire il tuo professore di Fisica, che non ha mai creduto veramente nelle tue potenzialità, decidi di costruire, con il filo, un circuito di forma quadrata non alimentato da alcun generatore nel quale riuscirai a far circolare una corrente, nonostante il filo non sia immerso nel campo magnetico generato dal solenoide.

Considera un circuito quadrato di lato $l = 20\ \mathrm{cm}$ e di resistenza complessiva $R = 1{,}0\ \Omega$, e un solenoide, molto lungo, costituito da spire circolari di raggio $r = 6{,}0\ \mathrm{cm}$ e con densità lineare di spire pari a $n = 1{,}0 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{spire}}{\mathrm{m}}$. Il solenoide viene inserito all'interno del circuito in modo che l'asse del solenoide sia perpendicolare al piano del circuito.
Nel seguito trascura per semplicità il fenomeno di autoinduzione.



e) Assumi che la corrente $i_{sol}(t)$ circolante nel solenoide, nel verso antiorario, abbia la seguente espressione:

$$i_{sol}(t) = 3,0e^2t^2e^{-2t},$$

dove t è il tempo in secondi e *i* la corrente in Ampere. Ricava, in funzione del tempo, l'espressione analitica del flusso del campo magnetico generato dal solenoide attraverso la superficie racchiusa dal circuito, la cui normale alla superficie è scelta uscente dal foglio e spiega perché essa non dipende dal valore di $l > 2R$.

f) Un amperometro rileva, per $t \geq 0$ s, una corrente $i_{ind}(t)$ nel circuito. Illustra le leggi fisiche alla base del fenomeno di induzione e verifica che l'espressione della corrente indotta al tempo $t = 2{,}0$ s è $i_{ind}(2{,}0) = \frac{12\ \pi r^2 \mu_0 n}{e^2 R}$ (e è il numero di Nepero). Se utilizzi un amperometro di portata $10\ \mathrm{mA}$ e di sensibilità $0{,}1\ \mathrm{mA}$ riesci a rilevare questa corrente? Motiva adeguatamente la risposta.

g) Considera ora la carica netta $q(t)$ transitata attraverso una sezione del circuito in funzione del tempo $t \geq 0$ s (per $t \leq 0$ s la carica è assunta nulla). Spiega perché, in un tempo infinito, questa carica è nulla.

Nota per lo studente curioso.
Il campo magnetico prodotto dalla corrente $i_{sol}(t)$ è confinato all'interno del solenoide lungo. Invece, il campo elettrico indotto agisce anche al di fuori del solenoide e determina il movimento dei portatori di carica all'interno del circuito.

RISOLUZIONE

a) Dobbiamo studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2e^{-bx}+cx}{(x^2-x)e^{-2x}}.$$

Se $c \neq 0$, il limite assume una forma del tipo:

$$\frac{0+\infty}{0}=\infty,$$

e ciò è assurdo poiché il testo richiede che il limite sia finito non nullo. Di conseguenza, $c=0$.

Di conseguenza, la funzione $f(x)$ ha la seguente espressione:

$$f(x)=ax^2e^{-bx}.$$

Studiamo, ora, al variare di b il limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2e^{-bx}}{(x^2-x)e^{-2x}}=\begin{cases}0 & b>2\\ a\neq 0 & b=2.\\ \infty & b<2\end{cases}$$

Di conseguenza, deve aversi:

$$c=0, b=2,$$

per cui si ottiene:

$$f(x)=ax^2e^{-2x}.$$

b) La funzione $y=f(x)$ è derivabile sul suo dominio. I punti stazionari di tale funzione si ottengono risolvendo la seguente equazione:

$$f'(x)=0.$$

Il calcolo della derivata fornisce:

$$f'(x)=a(2x-2x^2)e^{-2x},$$

dunque, si ha:

$$0=f'(x)=a(2x-2x^2)e^{-2x}\Leftrightarrow x=0{,}1.$$

Quindi, dobbiamo assumere $x_s=1$. Per determinare a basta considerare la seguente equazione:

$$3=f(x_s)=f(1)=ae^{-2},$$

da cui segue:

$$a=3e^2.$$

Quindi, la funzione f ha la seguente espressione:

$$f(x)=3e^2x^2e^{-2x}.$$

c) Studiamo gli intervalli di monotonia della funzione f:

$$f'(x)>0\Leftrightarrow 3e^2(2x-2x^2)e^{-2x}>0\Leftrightarrow 2x-2x^2>0, x\geq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq 1,$$

di conseguenza, si ha:

$$f \text{ è strettamente crescente } \Leftrightarrow 0\leq x\leq 1;\ f \text{ è strettamente decrescente } \Leftrightarrow x\geq 1.$$

Di conseguenza, f assume in x_s il valore più grande che è dunque il punto di massimo assoluto di tale funzione.

d) Procediamo nella determinazione dei flessi di f. Innanzitutto, determiniamo la derivata seconda della funzione data:

$$f''(x)=3e^2[2-4x-4x+4x^2]e^{-2x}=6e^2[2x^2-4x+1]e^{-2x};$$

di conseguenza, gli zeri della derivata seconda sono:

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ricordando che $x_s = 1$, si deduce che il grafico della Figura1 rappresenta il grafico di f e $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) Innanzitutto, osserviamo che il campo magnetico $\vec{B}(t)$ nel solenoide è uniforme e perpendicolare al circuito. Inoltre, per la regola della mano destra è uscente dal piano del foglio. Di conseguenza, il modulo del campo magnetico è dato da:

$$B(t) = \mu_0 n i_{sol}(t) = 3\mu_0 n e^2 t^2 e^{-2t}.$$

Di conseguenza, il flusso $\phi(t)$ del campo magnetico uscente dal circuito risulta essere dato da:

$$\phi(t) = B(t)\pi r^2 = (3\pi r^2 \mu_0 n e^2) t^2 e^{-2t}.$$

Il flusso non contenendo il parametro l, ne è indipendente.

f) La presenza di una corrente nel solenoide variabile nel tempo produce un campo magnetico variabile nel tempo localizzato nel solenoide; tale campo determina un flusso del campo magnetico variabile nel tempo. Di conseguenza, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, il circuito è soggetto ad una forza elettromotrice indotta $\mathcal{E}(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}$. Quindi, per la legge di Ohm, il circuito è percorso dalla corrente indotta $i_{ind}(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R}$.

Calcoliamo la corrente indotta:

$$i_{ind}(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{(3\pi r^2 \mu_0 n e^2)}{R}\frac{d}{dt}t^2 e^{-2t} = \frac{(6\pi r^2 \mu_0 n e^2)}{R} t(t-1)e^{-2t}.$$

Di conseguenza, si ha:

$$i_{ind}(2) = \frac{(6\pi r^2 \mu_0 n e^2)}{R} 2(2-1)e^{-2\cdot 2} = \frac{12\pi r^2 \mu_0 n}{R e^2}.$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene:

$$i_{ind}(2) = 2{,}3 \text{ mA},$$

valore che può essere rilevato dal nostro amperometro.

g) La carica $q(t)$ che attraversa il circuito si calcola nel seguente modo:

$$q(t) = \int_0^t i_{ind}(s)ds.$$

Di conseguenza, la carica netta q_{tot} che attraversa la generica sezione del circuito, dopo un tempo lunghissimo, si può calcolare nei seguenti termini:

$$q_{tot} = \lim_{t\to+\infty} q(t).$$

Possiamo evitare di calcolare l'integrale, osservando che, grazie al punto f), si ha:

$$\int i_{ind}(t)dt = -\frac{1}{R}\int \frac{d\phi(t)}{dt}dt = -\frac{1}{R}\phi(t) + C = -\frac{1}{R}(3\pi r^2 \mu_0 n e^2)t^2 e^{-2t} + C,$$

dove C è una costante arbitraria. Ora $q(t)$ è la primitiva di $i_{ind}(t)$ che si annulla per $t = 0$; di conseguenza, si ha:

$$q(t) = -\frac{1}{R}(3\pi r^2 \mu_0 n e^2)t^2 e^{-2t}.$$

Infine, si ha:

$$q_{tot} = -\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{R}(3\pi r^2 \mu_0 n e^2)t^2 e^{-2t} = 0 \text{ C}.$$

Indicatore	Livelli	Evidenze	Punteggio assegnato
Analizzare	L1: Non è in grado di individuare i modelli adeguati o li impiega in modo non corretto	Punto a) imposta il calcolo del limite per la determinazione dei parametri De L´Hôpital Punto b) imposta il procedimento per l´individuazione del punto stazionario Punto d) imposta il procedimento per l´individuazione dei punti di flesso e) conosce la definizione di flusso di un campo magnetico e imposta l´equazione del campo magnetico del solenoide f) utilizza la legge di Faraday-Neumann-Lenz e la legge di Ohm g) imposta l´integrale per ricavare la dipendenza della carica dal tempo	1/2
	L2: Riconosce e individua i modelli utili ad alcune situazioni e/o li utilizza in modo non del tutto appropriato		3
	L3: Riconosce con sufficiente sicurezza quasi tutti i modelli utili e li applica in modo accettabilmente coerente		4
	L4: Riconosce in tutti i contesti i modelli adeguati e li utilizza correttamente		5
Sviluppare	L1: Non è in grado di utilizzare le regole di calcolo e/o commette gravi errori	Punto a) calcola il limite utilizzando il teorema di del Teorema di De L´Hôpital Punto b) Utilizza le procedure per il calcolo della derivata prima e risolve l´equazione Punto d) Utilizza le procedure per il calcolo della derivata seconda e risolve l´equazione g) calcola l´integrale utilizzando il metodo di integrazione per parti f) calcola la derivata del flusso	1/2
	L2: Utilizza in modo incerto e/o impreciso le regole di calcolo		3
	L3: Utilizza in modo generalmente corretto e/o commettendo errori non particolarmente rilevanti le regole di calcolo		4

	L4: Applica correttamente e con sicurezza le regole di calcolo	del campo B g) calcola il limite della carica all´infinito	5
Interpretare	L1: Non riesce a contestualizzare le informazioni fornite	Punto d) riconosce il ruolo dei punti di flesso nell´individuazione della forma del grafico della funzione Punto f) riconosce e utilizza i parametri del circuito	1-2
	L2: Contestualizza solo parzialmente		3
	L3: E´in grado di utilizzare quasi tutte le informazioni nel modello scelto		4
	L4: E´ in grado di utilizzare tutte le informazioni nel contesto appropriato		5
Argomentare	L1: Non è in grado di giustificare o argomenta in modo inappropriato	Punto a) spiega l´utilizzo delle ipotesi del Teorema di De L´Hôpital Punto c) distingue i concetti di estremo relativo/assoluto Punto d) motiva la scelta tra i grafici in figura 1 e 2 Punto e) giustifica l´indipendenza del flusso di B dalla geometria della spira Punto f) riconosce il significato di portata e sensibilità di uno strumento Punto f) spiega la legge che regola il fenomeno dell´induzione elettromagnetica Punto g) riconosce il significato del passaggio al limite	1
	L2: Argomenta parzialmente o in modo non chiaramente coerente		2
	L3: Argomenta in modo corretto e coerente anche se non del tutto esauriente		3
	L4: Argomenta e motiva in modo esauriente e coerente con il contesto le sue scelte e i procedimenti		4