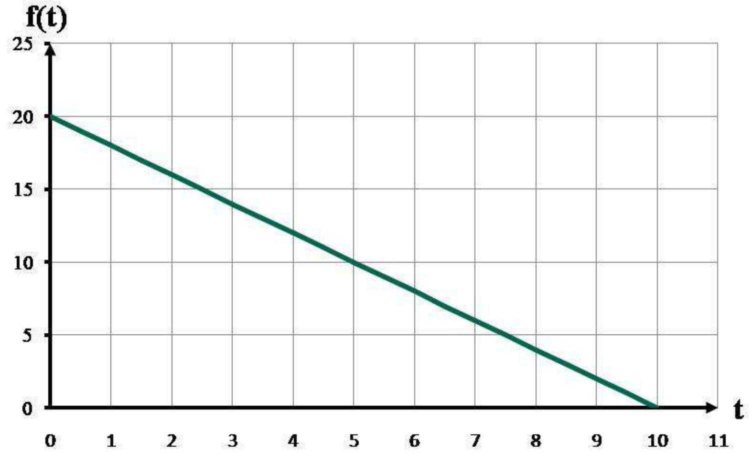
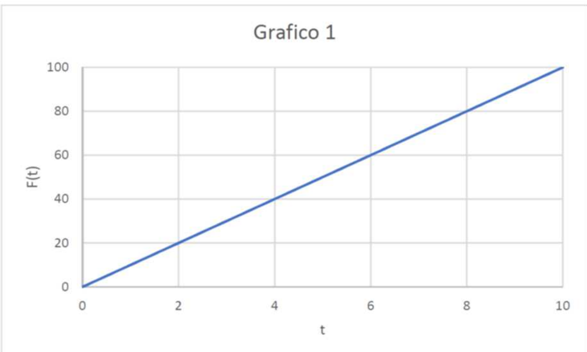
Problema Gruppo 5b

Induzione da piano

1. Considera la funzione lineare f(t) definita nell'intervallo [0; 10] il cui grafico è rappresentato in figura:



1a. Individua, tra i seguenti grafici, quello della primitiva F(t) della funzione f(t) passante per l'origine.

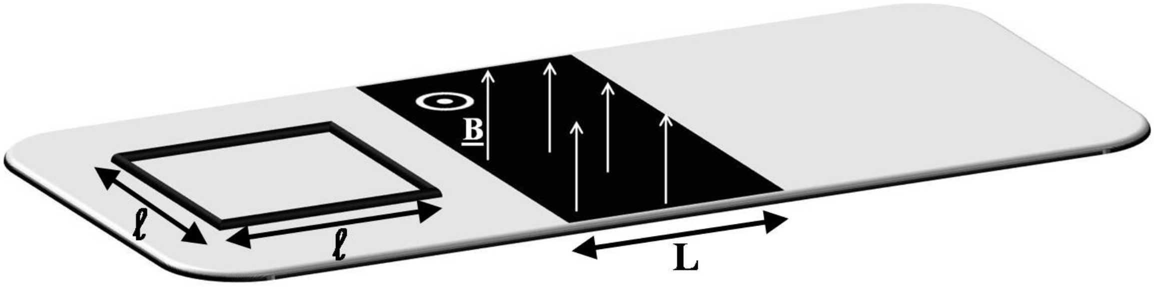


1b. Determina la pendenza della retta tangente al grafico di F(t) nell'origine.

1c. Determina il valore massimo di F(t) nell'intervallo [0;10]
Motiva in modo adeguato ogni risposta.

2. La funzione lineare f(t) può essere utilizzata come modello per descrivere situazioni fisiche diverse.

Sia **v(t) = 20 – 2t** la velocità, espressa in cm/s, di una spira quadrata avente il lato di lunghezza **ℓ= 20.0 cm** che si muove su un piano orizzontale (vedi figura sottostante). La resistenza della spira è **R = 2.00 Ω.**



All'istante **t = 2.00 s** la spira entra in una zona (in nero nella figura) in cui è presente un campo magnetico uniforme **B = 5.00 · 10^{-4} T** uscente dal piano e perpendicolare ad esso. La zona influenzata dal campo magnetico è una striscia lunga **L = 20.0 cm** e larga quanto il piano. Un dispositivo permette di mantenere la velocità indicata senza interazione significativa con il campo magnetico.

2a. Esamina la situazione descrivendo cosa accade nella spira nell'intervallo compreso tra l'istante iniziale **t_0 = 0.00 s** e l'istante finale **t_f = 10.00 s**.

2b. Traccia il grafico della funzione che esprime la forza elettromotrice indotta nella spira in funzione del tempo.

2c. Determina l'espressione della corrente indotta i_{ind} in funzione del tempo.

2d. Spiega se e come varia il verso della corrente indotta durante il moto della spira.

3. Verificato che la f.e.m. indotta è descritta dalla seguente funzione dove la f.e.m. è espressa in Volt e t in secondi:

$$\boldsymbol{f.e.m.(t)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{0 \le t \le 2} \\ \mathbf{(2t-20)\cdot 10^{-6}} & \mathbf{2 < t \le 10 - 2\sqrt{11}} \\ \mathbf{5\,(-0.4t+4)\cdot 10^{-6}} & \mathbf{10-2\sqrt{11} < t \le 10 - 2\sqrt{6}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{10 - 2\sqrt{6} < t \le 10} \end{cases}$$

3a. Stabilisci se la funzione è continua in [0; 10].

3b. Spiega, attraverso un'interpretazione geometrica, perché la funzione è integrabile nell'intervallo [0; 10].

3c. Calcola il valore dell'integrale nell'intervallo [0; 10].

3d. Interpreta, dal punto di vista fisico, il risultato ottenuto nel punto precedente.
Motiva in modo adeguato ogni risposta.

SOLUZIONE

1. f(t) definita in [0; 10]

la sua equazione è: $f(t) = -2t + 20$

1.a

Il grafico che rappresenta la primitiva F(t) della funzione f(t) è il n° 2:

$$F(t) = \int f(t)dt = -t^2 + 20t + c$$

$F(0) = c \rightarrow c = 0 \rightarrow F(t) = -t^2 + 20t$

1.b

La pendenza della retta tangente nell'origine al grafico di F(t) è 20 (significato geometrico di derivata)

$F(t) = -t^2 + 20t \rightarrow F'(t) = f(t) = -2t + 20 \rightarrow F'(0) = -2(0) + 20 = 20$

1.c

Il valore massimo di F(t) è 100, infatti:

$F(t) = -t^2 + 20t \rightarrow F'(t) = f(t) = -2t + 20$

$f(t) = 0 \rightarrow t = 10 \rightarrow F(t) = -100 + 200 = 100$

2. $v(t) = -2t + 20$ (cm/s)

$l = 20$ cm $= 0.20$ m

$R = 2.00\ \Omega$

$t = 2.00$ s

$B = 5.00 \cdot 10^{-4}$ T

$L = 20$ cm $= 0.20$ m

2.a

$t_0 = 0.00$ s $t_f = 10.00$ s

$t = 2.00$ s $\rightarrow v = 16$ cm/s $\rightarrow a = -2$ cm/s

In entrata:

$s(t) = vt - 1/2\ at^2 \rightarrow s(t) = 16t - t^2 \rightarrow s(t - 2) = 16(t - 2) - (t - 2)^2$

$A_i(t) = L \cdot s(t - 2) = 0.20 \cdot [16(t - 2) - (t - 2)^2]$

$\Phi_B(t) = B_i \cdot A_i(t) = 5.00 \cdot 10^{-4} \cdot 0.20 \cdot [16(t - 2) - (t - 2)^2] \cdot 10^{-2} = 5.00 \cdot 10^{-6} \cdot 0.20 \cdot [16(t - 2) - (t - 2)^2]$

$\Phi'_B(t) = -f.e.m.(t) = -10^{-6} \cdot [16t - 2(t - 2)] = 10^{-6} \cdot (2t - 20)$

In uscita:

$s(t) = 16t - t^2$ con $s(t) = 20 \rightarrow t^2 - 16t + 20 = 0 \qquad t = 8 \pm 2\sqrt{11}$

$t_1 = 8 + 2\sqrt{11}$ non si accetta

$t_2 = 8 - 2\sqrt{11} \rightarrow v(t) = -2t + 16 = v(8 - 2\sqrt{11}) = -2(8 - 2\sqrt{11}) + 16 = -16 + 4\sqrt{11} + 16 = 4\sqrt{11}$

$s(t) = vt - t^2 = (4\sqrt{11})(t - 10 + 2\sqrt{11}) - (t - 10 + 2\sqrt{11})^2$

$A_u(t) = L^2 - L \cdot s(t) = L^2 - L \cdot [(4\sqrt{11})(t - 10 + 2\sqrt{11}) - (t - 10 + 2\sqrt{11})^2] =$

$\Phi_B(t) = B_u \cdot A_u(t) = 5.00 \cdot 10^{-4} \cdot [0.04 - 0.2[(4\sqrt{11})(t - 10 + 2\sqrt{11}) - (t - 10 + 2\sqrt{11})^2] \cdot 10^{-2} =$

$= 5.00 \cdot 10^{-6} \cdot [0.04 - 0.2[(4\sqrt{11})(t - 10 + 2\sqrt{11}) - (t - 10 + 2\sqrt{11})^2]$

$\Phi'_B(t) = -f.e.m.(t) = -5.00 \cdot 10^{-6} \cdot [-0.2[(4\sqrt{11}) - 2(t - 10 + 2\sqrt{11})]] = -5.00 \cdot 10^{-6} \cdot (-0.2)[4\sqrt{11} - 2t + 20 +$

$- 4\sqrt{11})] = 5.00 \cdot 10^{-6} \cdot (-0.4t + 4)$

$s(t) = 16(t - 2) - (t - 2)^2$

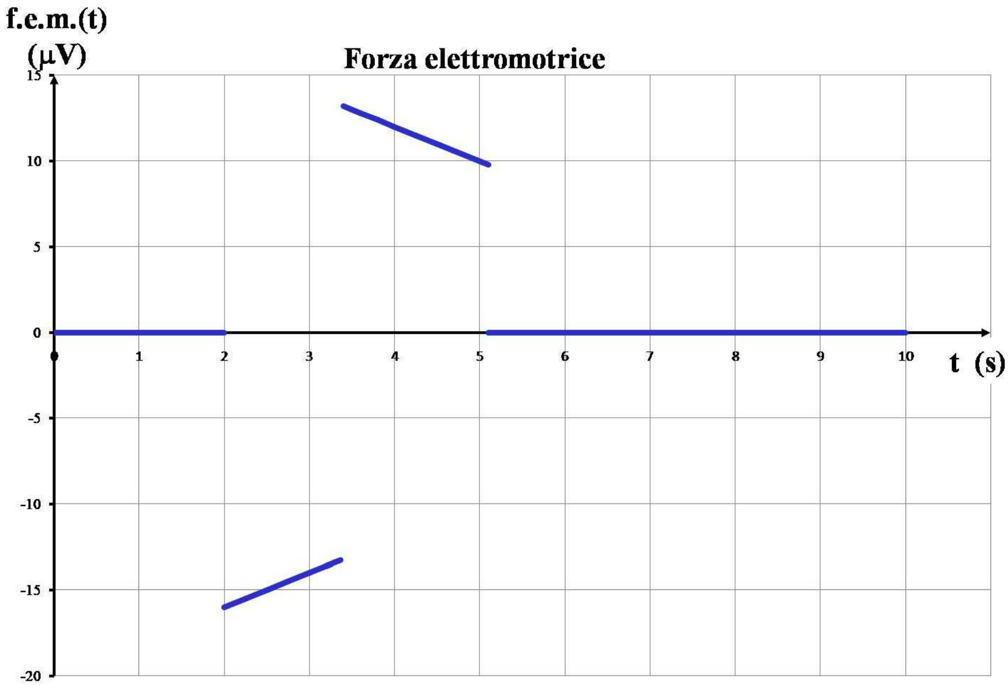
$40 = 16t - 32 - t^2 + 4t - 4$

$t^2 - 20\,t + 76 = 0$

$t_1 = 10 + 2\sqrt{6}$ non si accetta

$t_2 = 10 - 2\sqrt{6}$

$$f.\mathrm{e.m.}(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \mathrm{t} \leq 2 \\ (2\mathrm{t} - 20) \cdot 10^{-6} & 2 < \mathrm{t} \leq 10 - 2\sqrt{11} \\ 5\,(-0.4\mathrm{t} + 4) \cdot 10^{-6} & 10 - 2\sqrt{11} < \mathrm{t} \leq 10 - 2\sqrt{6} \\ 0 & 10 - 2\sqrt{6} < \mathrm{t} \leq 10 \end{cases}$$



2.c

I_{ind} = fem(t) / R

2.d

La corrente indotta genera un campo magnetico indotto B_{ind} tale da opporsi alla variazione di flusso magnetico.

Nella fase in cui la spira entra nella zona influenzata dal campo magnetico, il flusso cresce (aumenta la superficie soggetta al campo) per cui B_{ind} deve essere opposto al campo B, quindi deve essere entrante nella superficie. Per la regola della mano destra, essendo il pollice (ossia B_{ind}) rivolto verso il basso, le dita si chiuderanno in senso orario quindi i_{ind} girerà nella spira in senso orario.

Nella fase in cui la spira esce dal campo il B_{ind} deve essere rivolto verso l'alto (il flusso magnetico diminuisce) e quindi la corrente indotta girerà nella spira in senso antiorario.

3.a

La funzione non è continua nell'intervallo [0; 10], infatti dal grafico della funzione notiamo dei punti di discontinuità e precisamente:

t = 2

t = $10 - 2\sqrt{11}$

t = $10 - 2\sqrt{6}$

3.b

La funzione è integrabile in [0; 10], infatti pur presentando più punti di discontinuità, essendo una funzione continua a tratti, continuano a valere le tre proprietà fondamentali di linearità, additività e monotonia, in quanto derivano solamente dalla definizione di integrale; pertanto per la proprietà di additività se la funzione ha un punto di discontinuità di qualunque specie in un punto c interno all'intervallo [a; b], l'integrale $\int_a^b f(x)dx$= $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

3.c
Calcolo dell'integrale:

$$\int_{2}^{10-2\sqrt{11}} (2\mathrm{t}-20)\cdot 10^{-6}dt \quad + \int_{10-2\sqrt{11}}^{10-2\sqrt{6}} 5\ \cdot(-0.4\mathrm{t}+4)\cdot 10^{-6}dt =$$

$= [(t^2-20t)\cdot 10^{-6}]_{2}^{10-2\sqrt{11}} + [(-t^2+20t)\cdot 10^{-6}]_{10-2\sqrt{11}}^{10-2\sqrt{6}} =$

$= \left[\left(10-2\sqrt{11}\right)^2 - 20\left(10-2\sqrt{11}\right) - (4-40)\right]\cdot 10^{-6} + \left[\left(-\left(10-2\sqrt{6}\right)^2 + 20\left(10-2\sqrt{6}\right)\right) - \left(-\left(10-2\sqrt{11}\right)^2 + 20\left(10-2\sqrt{11}\right)\right)\right]\cdot 10^{-6} =$

$= \left[100-40\sqrt{11}+44-200+40\sqrt{11}+36\right]\cdot 10^{-6} + \left[-100 + 40\sqrt{6} - 24 + 200 - 40\sqrt{6} + 100 + - 40\sqrt{6} + 44 - 200 + 40\sqrt{11}\right]\cdot 10^{-6} =$

$= -20\cdot 10^{-6} + 20\cdot 10^{-6} = 0$

3.d
Il calcolo ci dice che le variazioni di flusso in entrata e uscita della spira dalla zona in cui è presente il campo magnetico sono uguali.

INDICATORI	EVIDENZE	PUNTI	PUNTEGGIO
Analizzare Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.	1a,2a,2c,2d,3d	5	
Sviluppare il processo risolutivo Formalizzare situazioni problematiche e applicare i concetti e i metodi matematici e gli strumenti disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.	1b,1c,2a,2c,3a,3c	6	
Interpretare, rappresentare, elaborare i dati Interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici.	1a, 2b,3a, 3c, 3d	5	
Argomentare Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.	1a,2(a), 2d, 3(a),3b, 3c	4	
VOTO = somma dei punteggi			