

Problema Gruppo 5A

Energia dalla mia finestra

Una tecnologia moderna produce energia elettrica sfruttando l'energia luminosa della luce che attraversa le finestre degli edifici. Il materiale di cui è fatta la finestra è trasparente per gran parte dello spettro visibile, ma assorbe selettivamente alcune frequenze per riemetterle in una banda diversa. La radiazione invisibile così riemessa, viene convogliata ai bordi della finestra dove opportune celle fotovoltaiche la convertono in corrente elettrica.

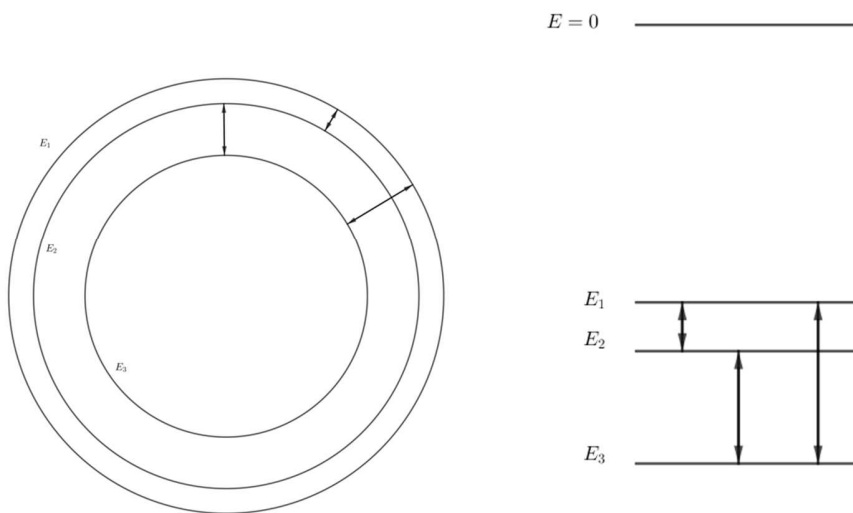
Su un campione del suddetto materiale si invia della radiazione il cui spettro è continuo nell'intervallo di lunghezze d'onda compreso tra 400 nm e 700 nm (luce visibile). In un modello opportunamente semplificato, ipotizziamo che i livelli energetici degli elettroni del materiale siano: $E_1 = -7,4$ eV, $E_2 = -8,7$ eV e $E_3 = -11,7$ eV. L'energia E_3 è quella del livello fondamentale degli atomi del materiale i cui elettroni possono trovarsi in uno qualsiasi dei tre stati corrispondenti alle tre energie indicate.

1. Riferendosi al modello dell'atomo di Bohr, si chiede allo studente di:
 - a) rappresentare con un schema grafico i livelli energetici dell'elettrone ricorrendo al modello di atomo singolo di Bohr indicando tutte le possibili transizioni;
 - b) calcolare le lunghezze d'onda della radiazione presenti nello spettro di assorbimento della luce visibile, giustificando la risposta (si ricorda che la costante di Planck è pari a $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js e che $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J);
 - c) determinare le lunghezze d'onda della radiazione, osservabili con uno strumento sensibile nell'intervallo tra 250 nm e 1200 nm, presenti nello spettro di emissione dello stesso materiale;
 - d) se tutti gli atomi del materiale si trovano nello stato fondamentale, e i suoi elettroni assorbono la radiazione incidente con energia pari a 3 eV, stabilire quali lunghezze d'onda della radiazione sono emesse nel processo di diseccitazione e se queste siano maggiori, minori o uguali a quella assorbita, motivando la risposta.

2. L'intensità di una radiazione I è definita come la potenza per unità di superficie. Se l'intensità incidente sul materiale, in funzione della lunghezza d'onda λ , è descritta dalla funzione $F(\lambda) = \frac{dI}{d\lambda} = \int_0^\lambda (at^2 + \frac{11}{150}t + c)dt$ espressa in mW/(m² nm):
 - a) quali sono i valori di a e c per i quali la funzione $F(\lambda) = 0$ agli estremi dello spettro visibile, cioè per $\lambda=400$ nm e $\lambda=700$ nm?
 - b) quale aspetto ha il grafico della funzione $F(\lambda)$ nell'intervallo [400; 700] nm?
 - c) quanto vale l'area sottesa dal grafico nello stesso intervallo?
 - d) qual è il significato fisico dell'area calcolata al punto precedente?

SOLUZIONE

1a) ci sono diversi modi di rappresentare i livelli energetici. Si può ricorrere alla rappresentazione schematica per livelli o a quella per orbite.



Le possibili transizioni sono indicate con doppie frecce e corrispondono ai salti E_1-E_2 , E_1-E_3 , E_2-E_3 .

1b) Le possibili transizioni avvengono, per quanto sopra, alle energie $E_{12}=-7.4+8.7=1.3$ eV, $E_{13}=-7.4+11.4=4.3$ eV e $E_{23}=-8.7+11.4=3$ eV. Le lunghezze d'onda λ corrispondenti si ricavano dalla relazione di Planck sapendo che $E=hf$ e che f (la frequenza della luce) vale $f=c/\lambda$. Abbiamo dunque

$$\lambda = \frac{hc}{E}$$

La costante di Planck in eVs si trova dividendo h espressa in Js per la carica del protone $h=6.63 \times 10^{-34} / 1.6 \times 10^{-19} = 4.14 \times 10^{-15}$ eVs. Moltiplicando h per la velocità della luce $c=3 \times 10^8$ m/s, si ottiene $hc=1.24 \times 10^{-6}$ eVm, corrispondente a 1240 eV nm. Otteniamo così $\lambda_{12}=954$ nm, $\lambda_{13}=288$ nm e $\lambda_{23}=413$ nm. Di queste solo λ_{23} si trova nello spettro visibile quindi si potrà osservare solo questa lunghezza d'onda.

1c) Lo spettro di emissione è uguale a quello di assorbimento. Nel caso di uno strumento che può osservare tutte le lunghezze d'onda comprese tra 250 e 1200 nm si potrebbero osservare anche le righe a 954 e a 288 nm. Si vedrebbero dunque tre righe di emissione.

1d) Quando la sostanza assorbe la radiazione di 3 eV, corrispondente al salto dal livello 3 al livello 2, gli elettroni si portano al livello 2. Da qui l'unica possibilità consiste nel ricadere nel livello 3, dunque l'unica radiazione possibile ha esattamente la stessa lunghezza d'onda di quella assorbita, cioè 413 nm.

2a) Per calcolare i valori dei parametri a e b basta imporre che $F(400 \text{ nm})=F(700 \text{ nm})=0$. Prima di tutto scriviamo $F(\lambda)$ nella forma usuale svolgendo l'integrale che è semplicemente

$$F(\lambda) = \frac{a\lambda^3}{3} + \frac{11}{300}\lambda^2 + c\lambda$$

Imponendo le condizioni sopra indicate, ed esprimendo le lunghezze d'onda in nm, si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{aligned} \frac{64 \times 10^6}{3}a + 400c &= -\frac{176 \times 10^2}{3} \\ \frac{343 \times 10^6}{3}a + 700c &= -\frac{539 \times 10^2}{3} \end{aligned}$$

la cui soluzione è $a=-10^{-4}$ e $c=-28/3$. I valori sono espressi in unità di misura che si ricavano dall'analisi dimensionale. Poiché le unità in cui è espressa $F(\lambda)$ sono quelle di $\text{mW}/(\text{m}^2\text{nm})$, mentre quelle di λ^3 sono quelli di nm^3 , le unità di a devono essere

$$[a] = \left[\frac{F}{\lambda^3} \right] = \frac{\text{mW}}{\text{m}^2\text{nm}} \frac{1}{\text{nm}^3} = \frac{\text{mW}}{\text{m}^2\text{nm}^4}$$

Ricordando che $1 \text{ nm}=10^{-9} \text{ m}$ e che $1 \text{ mW}=10^{-3} \text{ W}$, possiamo anche scrivere

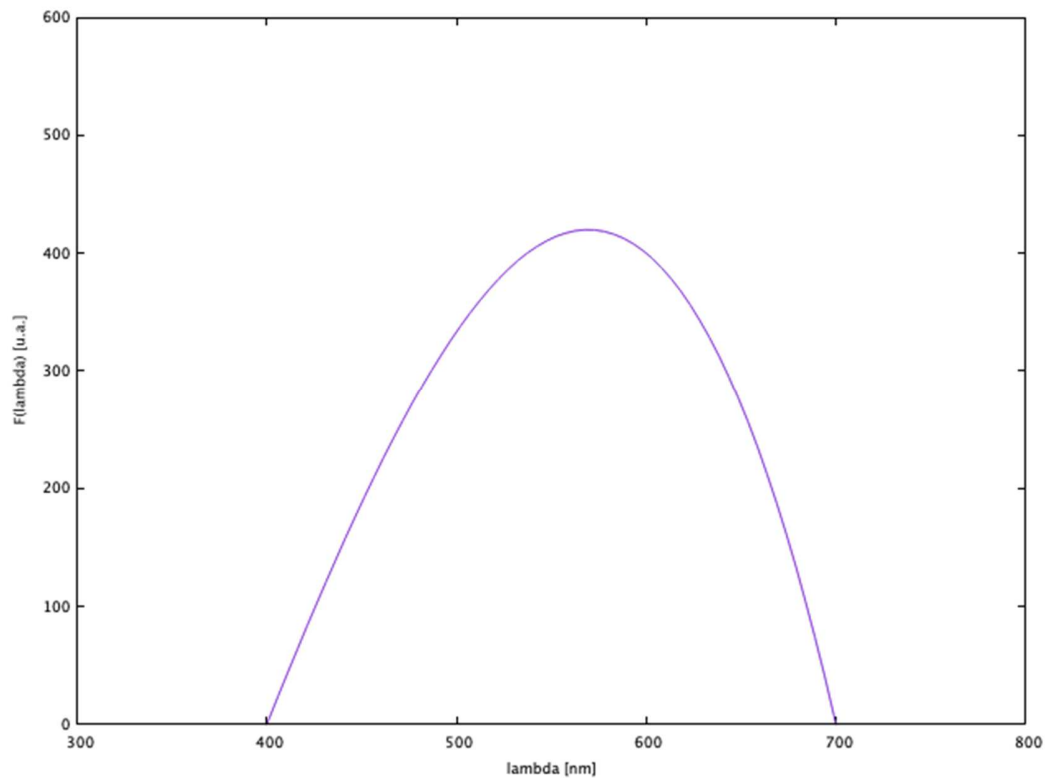
$$[a] = \frac{\text{W}}{\text{m}^6} 10^{33}.$$

Le unità di c invece sono semplicemente quelle di mW/m^2 .

2b) Per trovare la forma della funzione osserviamo che si tratta di una cubica che dunque avrà tre punti in cui il grafico incontra l'asse delle ascisse e presenterà un massimo e un minimo. Per trovare la posizione di questi basta imporre che la derivata sia nulla. La derivata non è che la funzione integranda nella definizione di $F(\lambda)$. Dobbiamo quindi imporre che

$$a\lambda^2 + \frac{11}{150}\lambda + c = 0$$

Quest'equazione ha due soluzioni delle quali una è negativa e deve essere scartata. La soluzione corrispondente al punto di massimo è $\lambda = \frac{100}{3}(11 + \sqrt{37})$, che vale circa 600 nm. Il grafico della funzione appare dunque così



2c) L'area sottesa dal grafico non è che l'integrale della funzione tra 400 nm e 700 nm:

$$I = \int_{400}^{700} F(\lambda) d\lambda = \frac{a\lambda^4}{12} + \frac{11}{900}\lambda^3 + \frac{c}{2}\lambda^2 \Big|_{400}^{700} = 55000(325000a + 3c + 62)$$

Sostituendo i valori di a e c si trova che

$$I = 82500 \text{ mW/m}^2.$$

2d) Il valore di I rappresenta la potenza luminosa complessiva che giunge sulla finestra per unità di superficie. In altre parole, per ogni metro quadro di finestra, su essa incidono 82.5 W di potenza luminosa.

Indicatori	Livello	Descrittori	Punti	Evidenze	Punteggio
Analizzare Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.	L1	Esamina la situazione fisica proposta in modo superficiale/o frammentario formulando ipotesi esplicative non adeguat esenza riconoscere modelli o analogie o leggi.	1 - 2	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 1 a - b- -c- d 	
	L2	Esamina la situazione fisica proposta in modo parziale formulando ipotesi esplicative non del tutto adeguate e riconoscendo modelli o analogie o leggi non sempre appropriate.	3		
	L3	Esamina la situazione fisica proposta in modo quasi completo formulando ipotesi esplicative complessivamente adeguate e riconoscendo modelli o analogie o leggi generalmente appropriate.	4		
	L4	Esamina criticamente la situazione fisica proposta in modo completo ed esauriente formulando ipotesi esplicative adeguate e riconoscendo modelli o analogie o leggi appropriati.	5		
Sviluppare il processo risolutivo Formalizzare situazioni problematiche e applicare i concetti e i metodi matematici e gli strumenti disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.	L1	Formalizza situazioni problematiche in modo superficiale e non applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione.	1 - 2	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 1 b – c- d ▪ 2 a – c -d 	
	L2	Formalizza situazioni problematiche in modo parziale e applica gli strumenti matematici e disciplinari in modo non sempre corretto per la loro risoluzione.	3 - 4		
	L3	Formalizza situazioni problematiche in modo quasi completo e applica gli strumenti matematici e disciplinari generalmente corretto per la loro risoluzione .	5		
	L4	Formalizza situazioni problematiche in modo completo ed esauriente e applica gli strumenti matematici e disciplinari corretti ed ottimali per la loro risoluzione.	6		
Interpretare, rappresentare, elaborare i dati Interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici.	L1	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo superficiale non verificandone la pertinenza al modello scelto.	1 - 2	<ul style="list-style-type: none"> ▪ 1 a ▪ 2 b 	
	L2	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo parziale verificandone la pertinenza al modello scelto in modo non sempre corretto.	3		
	L3	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo completo verificandone la pertinenza al modello scelto in modo corretto.	4		
	L4	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo completo ed esauriente verificandone la pertinenza al modello scelto in modo corretto ed ottimale.	5		

<p>Argomentare</p> <p>Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali.</p> <p>Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.</p>	L1	Descrive il processo risolutivo adottato in modo superficiale e comunica con un linguaggio specifico non appropriato i risultati ottenuti valutando la coerenza con la situazione problematica proposta.	1	<p>▪ 1 b – c- d 2 b - d</p>	
	L2	Descrive il processo risolutivo adottato in modo parziale e comunica con un linguaggio specifico non sempre appropriato i risultati ottenuti valutandone solo in parte la coerenza con la situazione problematica proposta.	2		
	L3	Descrive il processo risolutivo adottato in modo completo e comunica con un linguaggio specifico appropriato i risultati ottenuti valutandone nel complesso la coerenza con la situazione problematica proposta .	3		
	L4	Descrive il processo risolutivo adottato in modo completo ed esauriente e comunica con un linguaggio specifico appropriato i risultati ottenuti e ne valuta la coerenza con la situazione problematica proposta in modo ottimale .	4		
			Voto = somma del punteggio ottenuto		