

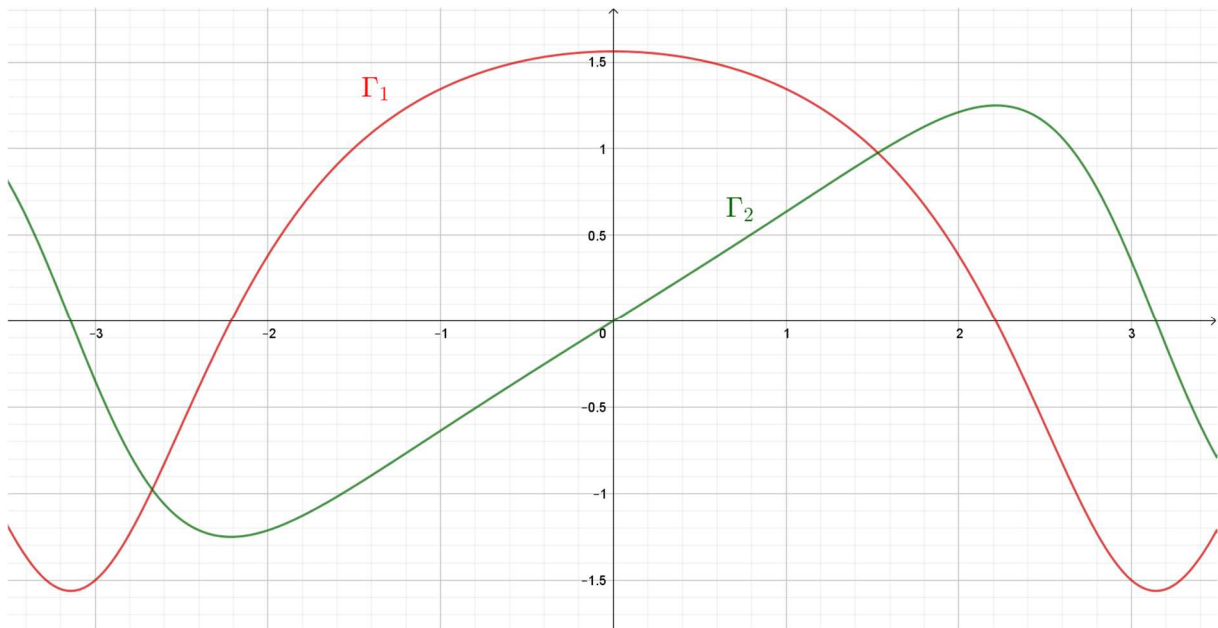
Problema Gruppo 4C

Moto di una cometa

Sono date le funzioni reali nella variabile reale θ e nei parametri reali positivi h e k :

$$f(\theta) = \frac{h \cdot k}{1 - k^2} + \frac{h \cdot \cos\theta}{1 + k \cdot \cos\theta} \qquad g(\theta) = \frac{h \cdot \sin\theta}{1 + k \cdot \cos\theta}$$

Inoltre, nella seguente figura, sono rappresentate due curve Γ_1 e Γ_2 :



Punto 1

Stabilisci, motivando la tua scelta, quale delle due curve rappresenta il grafico della $f(\theta)$ e quale quello della $g(\theta)$, per opportuni valori dei parametri h e k .

Punto 2

Sapendo che la curva Γ_2 ha un massimo relativo nel punto $M\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right); \frac{5}{4}\right)$, verifica che per la funzione corrispondente i parametri h e k risultano univocamente determinati.

Punto 3

Dopo aver verificato che $h = 1$ e $k = \frac{3}{5}$, calcola le coordinate dei punti di flesso della funzione $g(\theta)$ nell'intervallo $[-\pi; \pi]$.

Punto 4

Per ogni θ appartenente all'intervallo $[-\pi; \pi]$ siano $x = f(\theta)$ e $y = g(\theta)$ le coordinate cartesiane di un punto (x, y) del piano.

Dimostra che, per ogni θ , risulta verificata l'uguaglianza:

$$\left(x - \frac{h \cdot k}{1 - k^2}\right)^2 (1 - k^2) + y^2 + 2hk \left(x - \frac{h \cdot k}{1 - k^2}\right) = h^2 \qquad (\gamma)$$

Riconosci che (γ) è l'equazione di un'ellisse e determina la sua forma canonica.

Punto 5

Utilizzando in (γ) i valori di h e k indicati al punto (3), trova l'equazione della retta tangente a (γ) nel punto $P\left(\frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

Punto 6

La curva (γ) descrivere la traiettoria di una cometa e il parametro k ne rappresenta l'eccentricità. Osservando i dati in tabella individua di quale cometa si tratta, entro un errore del 3%.

Cometa	T	p	a	k
1P Halley	76,1	0,587	17,94	0,967
2P Encke	3,3	0,34	2,21	0,847
6P D'Arrest	6,51	1,346	3,49	0,614
9P Tempel 1	5,51	1,5	3,12	0,519
19P Borrelly	6,86	1,358	3,61	0,624
21P Giacobini-Zinner	6,52	0,996	3,52	0,706
26P Grigg-Skjellerup	5,09	0,989	2,96	0,664
55P Tempel-Tuttle	32,92	0,982	10,33	0,906
73P Schwassmann-Wachmann 3	5,36	0,937	3,06	0,694
75P Kohoutek	6,24	1,571	3,4	0,537
76P West-Kohoutek-Ikemura	6,46	1,596	3,45	0,540
81P Wild 2	6,39	1,583	3,44	0,540
107P Wilson-Harrington	4,29	1	2,64	0,623
Hale-Boop	4000	0,914	250	0,995
Hyakutake	40000	0,23	1165	0,999

T = periodo orbitale (γ = anni), p = distanza perielio (AU = Unità Astronomiche - se espressa in unità SI $1 \text{ AU} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$), a = semiasse maggiore (AU = Unità Astronomiche), k = eccentricità, (fonte NASA/NSSDC).

Punto 7

Calcola il rapporto tra l'area dell'ellisse descritta dalla cometa ed il periodo. Cosa rappresenta fisicamente il risultato ottenuto?

Soluzione Problema Gruppo 4C

Punto 1

Studiando la simmetria delle funzioni date è possibile associare ad ogni grafico la sua equazione

$$f(-\theta) = \frac{h \cdot k}{1 - k^2} + \frac{h \cdot \cos(-\theta)}{1 + k \cdot \cos(-\theta)} = \frac{h \cdot k}{1 - k^2} + \frac{h \cdot \cos(\theta)}{1 + k \cdot \cos(\theta)} = f(\theta)$$
$$g(-\theta) = \frac{h \cdot \sin(-\theta)}{1 + k \cdot \cos(-\theta)} = -\frac{h \cdot \sin(\theta)}{1 + k \cdot \cos(\theta)} = -g(\theta)$$

pertanto Γ_1 e Γ_2 sono i grafici, rispettivamente, di $f(\theta)$ e $g(\theta)$.

Punto 2

Imponendo le condizioni del passaggio della funzione per M e della derivata prima nulla in M si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\frac{4}{5}h}{1 - \frac{3}{5}k} = \frac{5}{4} \\ \frac{-\frac{3}{5}h + h \cdot k}{\left(1 - \frac{3}{5}k\right)^2} = 0 \end{cases}$$

da cui $h = 1, k = \frac{3}{5}$.

Punto 3

Studiando il segno delle derivate prima e seconda si individuano cinque flessi a tangente non orizzontale:

$$g'(\theta) = \frac{\cos\theta + \frac{3}{5}}{\left(1 + \frac{3}{5}\cos\theta\right)^2} \Rightarrow g'(\theta) = \frac{25\cos\theta + 15}{(5 + 3\cos\theta)^2};$$
$$g''(\theta) = \frac{5\sin\theta \cdot (3\cos\theta + 5)(15\cos\theta - 7)}{(5 + 3\cos\theta)^4}$$

$$g''(\theta) \geq 0 \text{ in } \left[-\pi; -\arccos\left(\frac{7}{15}\right)\right] \cup \left[\arccos\left(\frac{7}{15}\right); \pi\right]$$

per cui i punti di flesso sono:

$$F_1(-\pi; 0); F_2\left(-\arccos\left(\frac{7}{15}\right); -\arcsen\left(\frac{4\sqrt{11}}{15}\right)\right); F_3(0; 0);$$

$$F_4\left(\arccos\left(\frac{7}{15}\right); -\arcsen\left(\frac{4\sqrt{11}}{15}\right)\right); F_5(\pi; 0).$$

Punto 4

Sostituendo nell'equazione alla variabile x l'espressione $f(\theta)$ e alla variabile y l'espressione $g(\theta)$ si ottiene un'identità.

Semplificando si ottiene la seguente equazione: $\frac{x^2(1-k^2)^2}{h^2} + \frac{y^2(1-k^2)}{h^2} = 1,$

che è l'equazione di un'ellisse riferita al centro e agli assi a condizione che $1 - k^2 > 0$ ossia $-1 < k < 1$.

Punto 5

a) Verificato che il punto P appartiene all'ellisse è possibile determinare la retta tangente richiesta mediante la "regola dello sdoppiamento", ottenendo la seguente equazione:

$$64x + 60y - 125 = 0$$

Punto 6

Calcolando il 3% del parametro $k = \frac{3}{5}$ si ottiene l'intervallo $(0,60 \pm 0,02)$ e consultando i valori della tabella si osserva che l'eccentricità compatibile con questo intervallo è quella corrispondente alla cometa 6P D'Arrest.

Punto 7

Il rapporto si può calcolare con: $(\pi * \text{semiasse maggiore} * \text{semiasse minore})/T$.
Tramite questo calcolo, si ottiene $4,6 \text{ (AU)}^2/\text{y}$ (y = anni), che rappresenta la velocità areolare della cometa.

Griglia di Valutazione Problema Gruppo 4C

Indicatori	Livello	Descrittori	Punti	Evidenze	Punteggio massimo
Analizzare Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.	L1	Esamina la situazione fisica proposta in modo superficiale e/o frammentario formulando ipotesi esplicative non adeguate senza riconoscere modelli o analogie o leggi	0 - 5	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Analisi del grafico. ▪ Analizza e interpreta correttamente i dati della tabella e individua la cometa. ▪ Esamina correttamente la tabella ai fini della verifica dei risultati ottenuti. 	5
	L2	Esamina la situazione fisica proposta in modo parziale formulando ipotesi esplicative non del tutto adeguate e riconoscendo modelli o analogie o leggi non sempre appropriate	6 - 12		
	L3	Esamina la situazione fisica proposta in modo quasi completo formulando ipotesi esplicative complessivamente adeguate e riconoscendo modelli o analogie o leggi generalmente appropriate	13 - 19		
	L4	Esamina criticamente la situazione fisica proposta in modo completo ed esauriente formulando ipotesi esplicative adeguate e riconoscendo modelli o analogie o leggi appropriati	20 - 25		
Sviluppare il processo risolutivo Formalizzare situazioni problematiche e applicare i concetti e i metodi matematici e gli strumenti	L1	Formalizza situazioni problematiche in modo superficiale e non applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione	0 - 6	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Calcola correttamente la derivata prima e determina i parametri a e b. ▪ Calcola correttamente la derivata seconda. ▪ Dimostra che l'equazione (γ) non dipende da θ eseguendo 	6
	L2	Formalizza situazioni problematiche in modo parziale e applica gli strumenti matematici e disciplinari in modo non sempre corretto per la loro risoluzione	7 - 15		

disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.	L3	Formalizza situazioni problematiche in modo quasi completo e applica gli strumenti matematici e disciplinari generalmente corretto per la loro risoluzione	16 - 24	correttamente i passaggi algebrici. <ul style="list-style-type: none"> ▪ Pone la conica in forma canonica. ▪ Trova equazione della retta tangente. 	
	L4	Formalizza situazioni problematiche in modo completo ed esauriente e applica gli strumenti matematici e disciplinari corretti ed ottimali per la loro risoluzione	25 - 30	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Determina correttamente l'intervallo all'interno del quale individuare la cometa. ▪ Determina la posizione della cometa in funzione di θ. ▪ Calcola il rapporto fra l'area dell'ellisse e il periodo. 	
Interpretare, rappresentare, elaborare i dati Interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici.	L1	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo superficiale non verificandone la pertinenza al modello scelto	0 - 5	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Calcola la derivata e determina i parametri h e k; ▪ Individua i punti di flesso verificando la pertinenza con il grafico. ▪ Riconosce il tipo di conica. ▪ Pone correttamente le condizioni per la determinazione di h e k. ▪ Determina la distanza massima e minima dal Sole e verifica la 	5
	L2	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo parziale verificandone la pertinenza al modello scelto in modo non sempre corretto	6 - 12		
	L3	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo completo verificandone la pertinenza al modello scelto in modo corretto	13 - 19		
	L4	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo	20 - 25		

		completo ed esauriente verificandone la pertinenza al modello scelto in modo corretto ed ottimale		coerenza dei dati ottenuti con quelli della tabella. <ul style="list-style-type: none"> ▪ Interpreta fisicamente il rapporto fra area dell'ellisse e periodo. 	
Argomentare Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.	L1	Descrive il processo risolutivo adottato in modo superficiale e comunica con un linguaggio specifico non appropriato i risultati ottenuti non valutando la coerenza con la situazione problematica proposta	0 - 4	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Motiva la scelta del grafico. ▪ Motiva il procedimento per la determinazione di h e k. ▪ Motiva il procedimento per la determinazione dei flessi. ▪ Spiega la scelta del tipo di conica. ▪ Descrive la strategia per la determinazione della retta tangente. ▪ Motiva la scelta della cometa. ▪ Descrive il procedimento per la determinazione di a. ▪ Motiva la scelta del significato fisico tra area dell'ellisse e periodo. ▪ Valuta la coerenza tra la tabella e la situazione proposta. 	4
	L2	Descrive il processo risolutivo adottato in modo parziale e comunica con un linguaggio specifico non sempre appropriato i risultati ottenuti valutandone solo in parte la coerenza con la situazione problematica proposta	5 - 10		
	L3	Descrive il processo risolutivo adottato in modo completo e comunica con un linguaggio specifico appropriato i risultati ottenuti valutandone nel complesso la coerenza con la situazione problematica proposta	11 - 16		
	L4	Descrive il processo risolutivo adottato in modo completo ed esauriente e comunica con un linguaggio specifico appropriato i risultati ottenuti e ne valuta la coerenza con la situazione problematica proposta in modo ottimale	17 - 20		

	TOTALE			
--	---------------	--	--	--