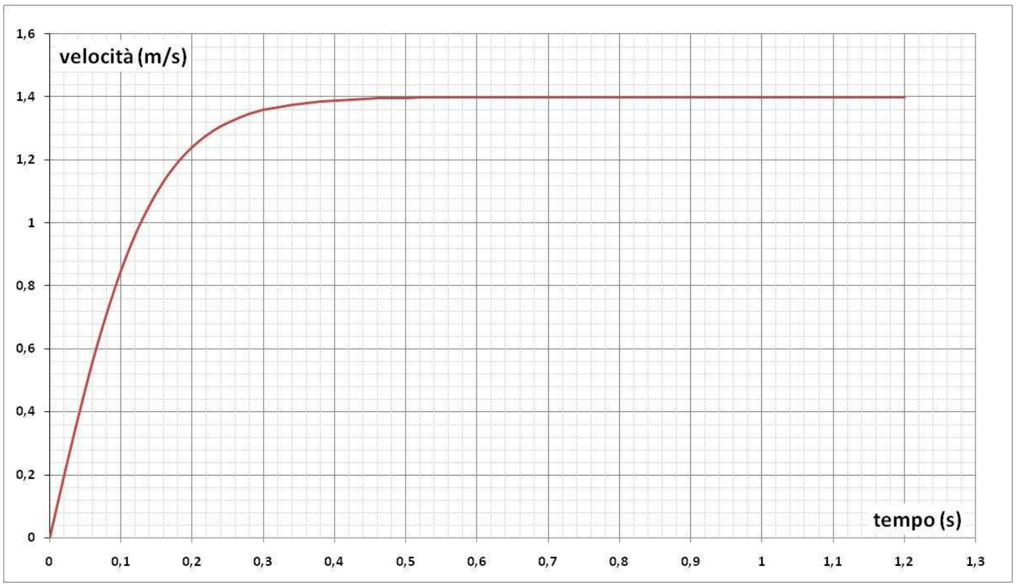
Problema Gruppo 4B

La caduta di un grave

Se un corpo leggero viene lasciato cadere, la forza di attrito prodotta su di esso dall'aria fa sì che la sua velocità aumenti tendendo asintoticamente ad un valore limite v_L .
Utilizzando un modello matematico secondo il quale la forza di attrito prodotta dall'aria aumenta all'aumentare della velocità del corpo, è stato prodotto il grafico seguente.
Esso rappresenta l'andamento della velocità in funzione del tempo, prevista dal modello matematico, nel caso in cui il corpo in caduta sia un pirottino da pasticceria di massa 0,7 g e diametro 10 cm.
Osservando il grafico si nota che la velocità del pirottino, inizialmente nulla, aumenta tendendo asintoticamente al valore limite $v_L = 1{,}4 \text{ m}/s$.



La figura precedente è il grafico di una funzione della forma

$$v(t) = \alpha \cdot \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}$$

con α e β opportuni valori reali positivi; t esprime il tempo in secondi e v la velocità in metri al secondo.

Punto1

Descrivi l'andamento delle forze agenti sul pirottino durante la caduta e giustifica perché la funzione $v(t)$ deve soddisfare le seguenti condizioni:

1. il valore della funzione $v(t)$ deve tendere, asintoticamente, a quello della velocità limite $v_L = 1{,}4\, m/s$;
2. l'accelerazione $a = \frac{dv}{dt}$ del pirottino all'istante iniziale $t = 0$ coincide con l'accelerazione di gravità $g = 9{,}8 \text{ m}/s^2$.

Determina il valore dei parametri α e β con le rispettive unità di misura, in modo che la funzione $v(t)$ soddisfi le precedenti condizioni.

Calcola alcuni punti della funzione $v(t)$ per $t \geq 0$ e verifica se essi coincidono con quelli della funzione disegnata nella figura precedente. In particolare, effettua il confronto per *t* = 0,1 s; *t* = 0,2 s; *t* = 0,3 s; *t* = 0,4 s .

Punto 2

Il modello matematico utilizzato si basa sull'ipotesi che l'intensità della forza di attrito agente sul pirottino in caduta cresca con la velocità v secondo la relazione $F_{att} = k \cdot v^2$, dove k è il coefficiente di attrito.

Dal grafico di $v(t)$ si deduce che per $t \geq 0{,}5$ s la velocità del pirottino può essere considerata costante.

Applicando il principio di inerzia a questa fase della caduta e utilizzando nuovamente la condizione che l'accelerazione alla partenza $(t = 0)$ deve essere pari a g, esprimi α e β in funzione della massa m del pirottino, del coefficiente di attrito k e dell'accelerazione di gravità g.

Punto 3

Dal punto precedente si deduce che la velocità dipende sia dal tempo t che dal coefficiente di attrito k. Precisamente, posto:

$$z = \sqrt{k} \qquad \text{e} \qquad b = 2t\sqrt{\frac{g}{m}}$$

la funzione velocità di caduta può essere scritta nella forma:

$$v = \frac{\sqrt{mg}}{z} \cdot \frac{e^{bz} - 1}{e^{bz} + 1}$$

Determina come si modifica la funzione v se il parametro k (e conseguentemente z) diminuisce sempre più tendendo ad annullarsi. Interpreta il significato fisico del risultato ottenuto.

Punto 4

Data la seguente funzione

$$F(t) = A \ln\left(\frac{e^{14t} + 1}{2}\right) + Bt$$

con A e B numeri reali, verifica se essa può essere una primitiva della funzione

$$v(t) = 1{,}4 \cdot \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}$$

Determina le unità di misura del fattore 1,4 presente nella espressione di $v(t)$ e il valore dei coefficienti A, B e β.

Calcola la *media integrale* della funzione $v(t)$ nell'intervallo temporale (espresso in secondi) [0 , 1].

Attribuisci un significato fisico al valore ottenuto.

Punto 5

La velocità media del pirottino durante l'intervallo di caduta rappresenta un valore che approssima per difetto la velocità limite v_L. Questa approssimazione migliora all'aumentare del tempo di caduta.

Determina l'espressione della velocità media $v_m(\tau)$ in funzione del tempo di caduta ⍰.

Si vuole calcolare il tempo di caduta per il quale la differenza percentuale tra la velocità limite v_L e la velocità media v_m è del 5%, ovvero:

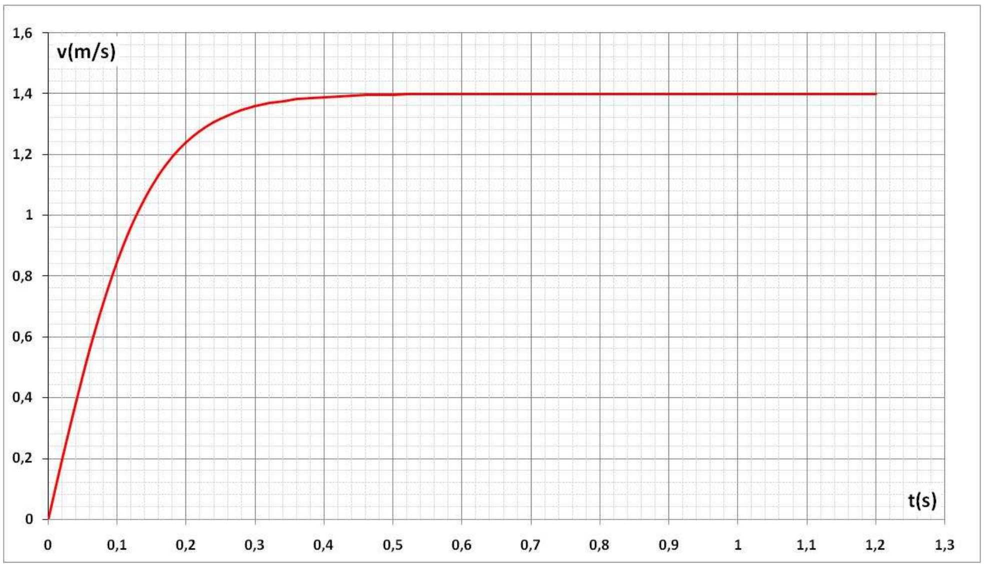
$$\frac{v_L - v_m}{v_L} = 0{,}05$$

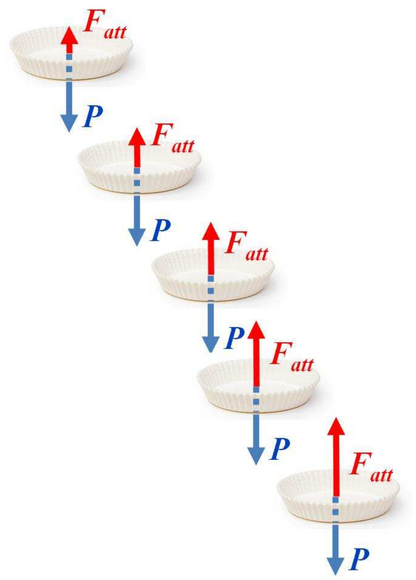
Verifica che questa equazione ammette una soluzione nell'intervallo temporale (espresso in secondi) $[1{,}90\ ,\ \ 2{,}00]$ e calcolane il valore approssimato alla seconda cifra decimale, descrivendo la procedura utilizzata.

Soluzione

Punto1

La forza totale agente sul pirottino durante la caduta ha modulo $F = P - F_{att}$. Se, come ipotizzato nel modello matematico, la forza di attrito dell'aria aumenta con la velocità, durante la caduta il modulo della forza totale andrà diminuendo fino a diventare trascurabile in modo da poter assumere $F_{att} = P$. In tale situazione il moto si può considerare rettilineo uniforme con velocità v_L che, per il nostro pirottino, vale $1{,}4 \text{ m/s}$.
Negli istanti iniziali della caduta, la forza di attrito è trascurabile e il moto avviene per effetto della sola forza peso che produce una accelerazione pari a g.





Applichiamo ora alla funzione $v(t)$ le due condizioni stabilite dal testo.

1. il valore della funzione $v(t)$ deve tendere, asintoticamente, a quello della velocità limite $v_L = 1{,}4 \text{ m/s}$;
2. l'accelerazione $a = \frac{dv}{dt}$ del pirottino all'istante iniziale $t = 0$ coincide con l'accelerazione di gravità $g = 9{,}8 \text{ m}/s^2$.

La prima delle due condizioni è soddisfatta se

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1} = v_L$$

Il limite a primo membro si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e può essere calcolato utilizzando il teorema di De l'Hospital:

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1} = \lim_{t\to+\infty} \alpha \frac{\beta e^{\beta t}}{\beta e^{\beta t}} = \alpha$$

da cui

$$\alpha = v_L = 1{,}4 \text{ m/s}$$

Se $v(t)$ descrive la velocità del pirottino, la sua accelerazione è descritta dalla funzione

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \alpha \frac{\beta e^{\beta t}(e^{\beta t} + 1) - \beta e^{\beta t}(e^{\beta t} - 1)}{(e^{\beta t} + 1)^2} = 2\alpha\beta \frac{e^{\beta t}}{(e^{\beta t} + 1)^2}$$

Affinché l'accelerazione del pirottino alla partenza sia uguale a quella di gravità g, deve essere

$$a(t=0) = \frac{2\alpha\beta}{4} = g$$

da cui

$$\alpha\beta = 2g \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{2g}{\alpha} = \frac{2g}{v_L} = \frac{2 \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}}{1{,}4\ \mathrm{m/s}} = 14\ s^{-1}$$

La funzione $v(t)$ che soddisfa le condizioni enunciate nel quesito è:

$$v(t) = 1{,}4\ \frac{e^{14t}-1}{e^{14t}+1}$$

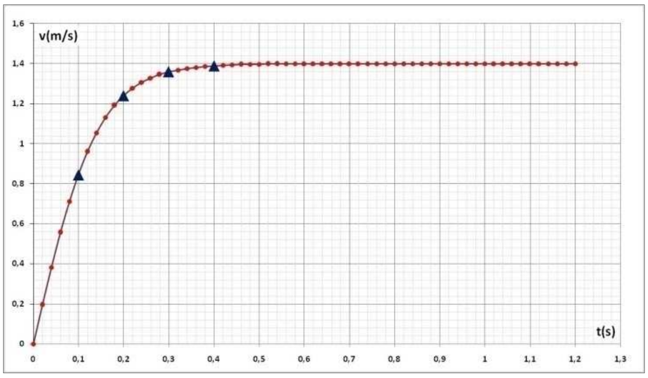
Osserviamo che il grafico di questa funzione,

- passa per l'origine degli assi;
- è sempre crescente essendo la sua deriva $v'(t)$ sempre positiva;
- ha come asintoto orizzontale $v = v_L = 1{,}4\ \mathrm{m/s}$;

Calcoliamo le coordinate della funzione v(t) negli istanti di tempo richiesti.

t	$v(t)$
0,1 s	0,845 m/s
0,2 s	1,239 m/s
0,3 s	1,359 m/s
0,4 s	1,390 m/s

Riportiamo questi punti sul piano cartesiano dove è disegnata la funzione *v*(*t*) fornito dal modello matematico.

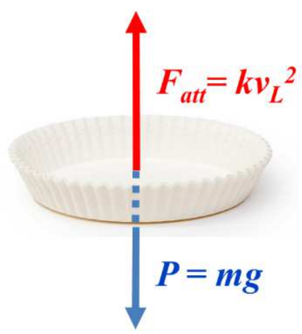


Si nota che i punti coincidono con quelli del modello matematico. Pertanto si deduce che la funzione che descrive l'andamento della velocità è:

$$v(t) = 1{,}4\ \frac{e^{14t}-1}{e^{14t}+1}$$

Punto 2

Durante la fase in cui la caduta del pirottino avviene a velocità costante v_L, per il principio di inerzia, la risultante delle forze applicate al pirottino deve essere nulla. In questa fase deve risultare



$$F_{att} = P \quad \Rightarrow \quad kv_L^2 = mg \quad \Rightarrow \quad v_L = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

da cui

$$\alpha = v_L = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Dalla condizione che l'accelerazione alla partenza deve essere pari a g si ha:

$$\beta = \frac{2g}{\alpha} = \frac{2g}{v_L} = 2g\sqrt{\frac{k}{mg}} = 2\sqrt{\frac{kg}{m}}$$

Pertanto, l'equazione di $v(t)$ può essere scritta come:

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\ \frac{e^{2\sqrt{kg/m}\cdot t} - 1}{e^{2\sqrt{kg/m}\cdot t} + 1}$$

Punto 3

Ricordando che abbiamo posto

$$z = \sqrt{k} \qquad \text{e} \qquad b = 2t\sqrt{\frac{g}{m}}$$

Calcoliamo il limite per z tendente a zero della funzione data:

$$v = \lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{mg}}{z}\cdot\frac{e^{bz}-1}{e^{bz}+1} = \frac{0}{0}$$

Utilizzando il teorema di De l'Hospital si ha:

$$v = \sqrt{mg}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{e^{bz}-1}{z(e^{bz}+1)} = \sqrt{mg}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{be^{bz}}{e^{bz}+1+zbe^{bz}} = \frac{\sqrt{mg}}{2}\cdot b$$

Dalla posizione $b = 2t\sqrt{\frac{g}{m}}$ segue:

$$v = \frac{\sqrt{mg}}{2}\cdot 2t\sqrt{\frac{g}{m}} = gt$$

Il significato di questo risultato si interpreta nel seguente modo:
In assenza di attrito il pirottino cade con accelerazione costante pari a *g*.

Punto 4

Nella espressione di $v(t)$ la frazione risulta adimensionale. Di conseguenza il fattore 1,4 deve essere omogeneo alla velocità e quindi deve essere espresso in metri al secondo.
La derivata della funzione $F(t)$ è:

$$F'(t) = A\frac{2}{e^{14t}+1}\frac{14e^{14t}\cdot 2}{4} + B$$

che dopo qualche passaggio si può scrivere nella forma:

$$F'(t) = \frac{(14A+B)e^{14t}+B}{e^{14t}+1}$$

Quest'ultima funzione coincide con la $v(t)$ se e solo se

$$\begin{cases} 14A + B = 1{,}4 \\ B = -1{,}4 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A = 0{,}2 \\ B = -1{,}4 \end{cases}$$

Pertanto, la funzione

$$F'(t) = 0{,}2\ln\left(\frac{e^{14t}+1}{2}\right) - 1{,}4t$$

è una primitiva della funzione $v(t)$.

La funzione $v(t)$ è continua nell'intervallo di tempo (espresso in secondi) $[0\ ,1]$. Il calcolo della media integrale nell'intervallo di tempo (espresso in secondi) $[0\ ,1]$ è dato da

$$v_m = \frac{\int_0^1 v(t)dt}{1-0} = F(1) - F(0) = 0{,}2\ln\left(\frac{e^{14}+1}{2}\right) - 1{,}4 = 1{,}26\ \mathrm{m/s}$$

L'integrale $\int_0^1 v(t)dt$ è l'area della superficie sottesa dal grafico di $v(t)$ nell'intervallo temporale espresso in secondi $[0\,,1]$. Questa area corrisponde alla distanza percorsa dal pirottino in 1 s, pertanto il valore di v_m rappresenta la velocità media del pirottino nel primo secondo di caduta.

Punto 5

L'altezza da cui cade il pirottino è la distanza Δy percorsa nel tempo di caduta τ e, dalla precedente relazione, si ha

$$\Delta y = 0{,}2\cdot\ln\left(\frac{e^{14\tau}+1}{2}\right) - 1{,}4\cdot\tau$$

La velocità media è data allora da

$$v_m = \frac{\Delta y}{\tau} = \frac{0{,}2}{\tau}\cdot\ln\left(\frac{e^{14\tau}+1}{2}\right) - 1{,}4$$

Si vuole che

$$\frac{v_L - v_m}{v_L} = 0{,}05$$

Esplicitando v_m si ha

$$\frac{1{,}4 - \frac{0{,}2}{\tau}\cdot\ln\left(\frac{e^{14\tau}+1}{2}\right) + 1{,}4}{1{,}4} = 0{,}05$$

$$1{,}4 - \frac{0{,}2}{\tau}\cdot\ln\left(\frac{e^{14\tau}+1}{2}\right) + 1{,}4 = 1{,}4\cdot 0{,}05$$

$$2{,}73 - \frac{0{,}2}{\tau}\cdot\ln\left(\frac{e^{14\tau}+1}{2}\right) = 0$$

Detta $f(\tau)$ la funzione a primo membro, verifichiamo se per essa vale il teorema degli zeri nell'intervallo temporale (espresso in secondi) [1,90, 2,00].

$$f(\tau = 1{,}90\ s) = 2{,}96\cdot 10^{-3} \qquad f(\tau = 2{,}00\ s) = -6{,}85\cdot 10^{-4}$$

Risulta $f(\tau = 1{,}90\ s)\cdot f(\tau = 2{,}00\ s) < 0$, inoltre $f(\tau)$ è continua nell'intervallo temporale (espresso in secondi) $[1{,}90\ , 2{,}00\ ]$. Per il teorema degli zeri essa ha uno zero in tale intervallo.
Utilizzando il metodo di bisezione o semplicemente la calcolatrice si trova che il valore approssimato richiesto è 1,98 s.

Griglia di Valutazione Problema Gruppo 4B

Indicatori	Livello	Descrittori	Punti	Evidenze	Punteggio massimo
Analizzare Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.	L1	Esamina la situazione fisica proposta **in modo superficiale e/o frammentario** formulando ipotesi esplicative **non adeguate senza riconoscere modelli** o analogie o leggi	**0 - 5**	▪ Utilizza la seconda legge della dinamica per descrivere il moto. ▪ Sceglie un sistema di riferimento per la descrizione del moto coerente con il modello proposto. ▪ Utilizza il principio di inerzia per descrivere il moto asintotico durante la caduta. ▪ Individua correttamente l'andamento della velocità confrontandolo con il grafico fornito. ▪ Individua che la funzione $F(t)$ rappresenta la posizione del pirottino.	**5**
	L2	Esamina la situazione fisica proposta **in modo parziale** formulando ipotesi esplicative **non del tutto adeguate** e **riconoscendo** modelli o analogie o leggi **non sempre appropriate**	**6 - 12**		
	L3	Esamina la situazione fisica proposta **in modo quasi completo** formulando ipotesi esplicative **complessivamente adeguate** e **riconoscendo** modelli o analogie o leggi **generalmente appropriate**	**13 - 19**		
	L4	**Esamina criticamente** la situazione fisica proposta in modo **completo ed esauriente** formulando ipotesi esplicative **adeguate** e riconoscendo modelli o analogie o leggi **appropriati**	**20 - 25**		
Sviluppare il processo risolutivo Formalizzare situazioni problematiche e applicare i	L1	Formalizza situazioni problematiche **in modo superficiale** e **non applica** gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione	**0 - 6**	▪ Applica la seconda legge della dinamica per dedurre le forze agenti. ▪ Calcola il valore del parametro α, utilizzando il limite.	**6**
	L2	Formalizza situazioni problematiche **in**	**7 – 15**		

<table>
<tr>
<td rowspan="3">concetti e i metodi matematici e gli strumenti disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.</td>
<td></td>
<td>modo parziale e applica gli strumenti matematici e disciplinari in modo non sempre corretto per la loro risoluzione</td>
<td></td>
<td rowspan="3">▪ Calcola il valore del parametro β con la derivata della velocità nel tempo zero.
▪ Applica il principio di inerzia per esprimere i due parametri in funzione di m, k e di g.
▪ Calcola il limite per z che tende a zero della velocità.
▪ Verifica che $F(t)$ rappresenta la primitiva della funzione $v(t)$.
▪ Determina l’espressione e calcola la velocità media in funzione di τ.
▪ Risolve l’equazione proposta con la precisione richiesta.
▪ Utilizza il teorema dell’esistenza degli zeri, trovando il valore richiesto.</td>
<td rowspan="3"></td>
</tr>
<tr>
<td>L3</td>
<td>Formalizza situazioni problematiche in modo quasi completo e applica gli strumenti matematici e disciplinari generalmente corretto per la loro risoluzione</td>
<td>16 - 24</td>
</tr>
<tr>
<td>L4</td>
<td>Formalizza situazioni problematiche in modo completo ed esauriente e applica gli strumenti matematici e disciplinari corretti ed ottimali per la loro risoluzione</td>
<td>25 - 30</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Interpretare, rappresentare, elaborare i dati

Interpretare e/o elaborare i dati proposti</td>
<td>L1</td>
<td>Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo superficiale non verificandone la pertinenza al modello scelto</td>
<td>0 - 5</td>
<td rowspan="2">▪ Individua le forze agenti sul sistema sia alla partenza che durante il moto.
▪ Riconosce che nella fase della caduta la velocità tende</td>
<td rowspan="2">5</td>
</tr>
<tr>
<td>L2</td>
<td>Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo</td>
<td>6 - 12</td>
</tr>
</table>

e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici.		**parziale** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo non sempre corretto**		asintoticamente ad un valore limite. ▪ Organizza i dati dedotti dai grafici e quelli forniti dal testo per dedurre le informazioni richieste. ▪ Individua il significato fisico del valor medio della funzione $v(t)$. ▪ Interpreta il significato fisico della diminuzione del parametro k. ▪ Confronta i dati della funzione v(t) con quelli del modello matematico	
	L3	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo completo** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo corretto**	**13 - 19**		
	L4	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo completo ed esauriente** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo corretto ed ottimale**	**20 - 25**		
Argomentare Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.	L1	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo superficiale** e comunica **con un linguaggio specifico** non **appropriato** i risultati ottenuti **non** valutando la coerenza con la situazione problematica proposta	**0 - 4**	▪ Spiega la strategia utilizzata per descrivere le forze agenti sul pirottino. ▪ Individua la forma di indeterminazione del limite e argomenta come eliminarla per calcolare i parametri α e k. ▪ Spiega come utilizzare il principio di inerzia ▪ Spiega come esprimere i due parametri in	**4**
	L2	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo parziale** e comunica **con un linguaggio specifico** non **sempre appropriato** i risultati ottenuti valutandone **solo in parte** la coerenza con la situazione problematica proposta	**5 - 10**		
	L3	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo completo** e comunica **con un linguaggio specifico**	**11 - 16**		

		appropriato i risultati ottenuti valutandone **nel complesso** la coerenza con la situazione problematica proposta		funzione di m, k e di g. ▪ Argomenta sulle dimensionalità fisiche del fattore moltiplicativo dell’espressione di $v(t)$. ▪ Argomenta l’interpretazione fisica della media integrale. ▪ Motiva come utilizzare il teorema dell’esistenza degli zeri e il processo risolutivo adottato per calcolare il valore.	
	L4	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo completo ed esauriente** e comunica **con un linguaggio specifico** appropriato i risultati ottenuti e ne valuta la coerenza con la situazione problematica proposta **in modo ottimale**	**17 - 20**		
TOTALE					