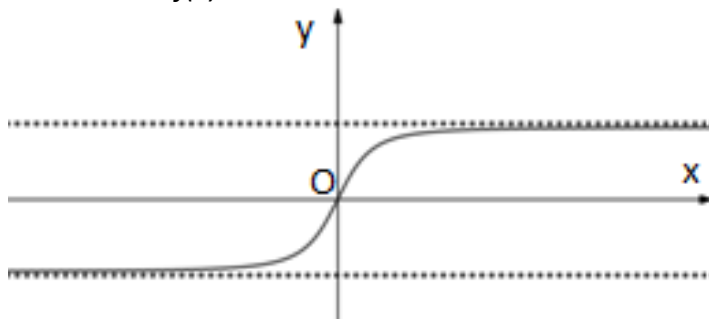


Gruppo 3 Problema 3c

Un moto asintotico

E' dato il grafico Γ della funzione $f(x)$



1. Lo si associ alla corretta espressione analitica, scegliendo tra le opzioni proposte: h e k sono parametri reali e positivi. Si motivi adeguatamente la scelta.

a. $y = hx^3 - kx$

c. $y = \frac{hx}{\sqrt{1+k^2x^2}}$

b. $y = h \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{k^2}\right)$

d. $y = h - e^{-kx}$

2. Detta $y = F(x)$ una delle primitive di $f(x)$, si tracci il suo grafico a partire da Γ argomentando il procedimento seguito.

Si ponga ora $h = 7$ e $k = 5$.

3. Si verifichi che l'origine è un punto di flesso per Γ e che la tangente al grafico in quel punto ha equazione $y = hx$
4. Si determini mediante procedimento analitico l'espressione della primitiva $g(x)$ tale che $g(0) = 7/25$. Si verifichi che l'espressione trovata è coerente con il grafico di $F(x)$ e che l'equazione dei suoi asintoti obliqui è del tipo:

$$y = \pm \frac{h}{k}x$$

Si provi infine che $g(x)$ è riconducibile ad una conica di cui si chiede la forma canonica.

5. Si consideri ora il grafico Γ per $x > 0$.
Esso rappresenta l'andamento della velocità v di un punto materiale in funzione del tempo t :

$$v(t) = \frac{ht}{\sqrt{1+k^2t^2}}$$

Si indichi quale grandezza fisica è espressa dalla primitiva di $v(t)$.

Si consideri ora $h = 20 \text{ m/s}^2$ e $k = \frac{2}{3} \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$.

- a. Si esamini il moto per tempi piccoli, attraverso lo studio della retta tangente a $v(t)$ nell'origine;
- b. si esamini il moto per tempi grandi, attraverso lo studio dell'asintoto orizzontale di $v(t)$ e di quello obliquo della sua primitiva.

Dalle considerazioni dei punti a e b si individui, motivando la scelta, qual è il fenomeno associato al modello proposto:

- a. Moto viscoso smorzato
- b. Moto uniformemente accelerato
- c. Moto armonico
- d. Moto relativistico accelerato.

Soluzioni proposte del problema: Un moto asintotico

1. Ragionando per esclusione:
a non ha asintoti orizzontali; b e d non sono funzioni dispari
2. La $f(x)$ ha una intersezione in $O(0;0)$ e passa da valori negativi a valori positivi, quindi la $g(x)$ ha un minimo sull'asse y ;
la $f(x)$ è crescente, quindi $g(x)$ è concava verso l'alto;
la $f(x)$ ha asintoti orizzontali, quindi la $g(x)$ ha asintoti obliqui.

3. Dal calcolo esplicito $f'(x) = \frac{h}{\sqrt{1+k^2x^2}}$ risulta $f''(x) = -\frac{hk^2x}{(1+k^2x^2)^{3/2}}$ e

Ne segue $f''(0) = 0$, $f''(x) > 0$ per $x < 0$ e $f''(x) < 0$ per $x > 0$, $f'(0) = h$; pertanto l'origine è un flesso e la tangente inflessionale ha equazione generica $y = hx$

4. Eseguendo il calcolo integrale la primitiva particolare cercata è $g(x) = \frac{7}{25}\sqrt{1+25x^2}$
riconducibile alla iperbole $\frac{625}{49}y^2 - 25x^2 = 1$

Gli asintoti obliqui hanno equazioni $y = 7x/5$ e $y = -7x/5$ in accordo con la generale espressione letterale proposta.

5. La primitiva della velocità rappresenta l'equazione oraria del punto materiale.
Con i valori forniti si nota che per tempi piccoli si ha un moto uniformemente accelerato e per tempi grandi il moto tende ad essere uniforme con velocità limite c .
Da tutto ciò si evince che il moto è accelerato relativistico.

RUBRICA DI VALUTAZIONE

Indicatori	Livello	Descrittori	Punti	Evidenze	Punteggio massimo
Analizzare Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.	L1	Esamina la situazione fisica proposta in modo superficiale e/o frammentario formulando ipotesi esplicative non adeguate senza riconoscere modelli o analogie o leggi	0 - 5	Q1_ Associa i tratti salienti di una funzione al suo grafico <ul style="list-style-type: none"> ◦ simmetrie ◦ presenza asintoti 	5
	L2	Esamina la situazione fisica proposta in modo parziale formulando ipotesi esplicative non del tutto adeguate e riconoscendo modelli o analogie o leggi non sempre appropriate	6 - 12	<ul style="list-style-type: none"> ◦ andamento della funzione esponenziale Q2_ Analizza la relazione tra una funzione e la sua derivata	
	L3	Esamina la situazione fisica proposta in modo quasi completo formulando ipotesi esplicative complessivamente adeguate e riconoscendo modelli o analogie o leggi generalmente appropriate	13 - 19	<ul style="list-style-type: none"> ◦ segno $f \rightarrow$ monotonia g ◦ zeri di $f \rightarrow$ punti stazionari ◦ monotonia di $f \rightarrow$ segno di $g'' \rightarrow$ concavità g 	
	L4	Esamina criticamente la situazione fisica proposta in modo completo ed esauriente formulando ipotesi esplicative adeguate e riconoscendo modelli o analogie o leggi appropriati	20 - 25	Q5_ Riconosce la relazione $v = ds/dt$ Comprende la richiesta di analizzare le due parti del moto Riconosce i tratti salienti dei moti proposti e associa correttamente il modello alla situazione proposta.	

<p>Sviluppare il processo risolutivo</p> <p>Formalizzare situazioni problematiche e applicare i concetti e i metodi matematici e gli strumenti disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.</p>	L1	Formalizza situazioni problematiche in modo superficiale e non applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione	0 - 6	<p>Q2_ Elabora la relazione tra una funzione e la sua derivata e/o utilizza il significato geometrico della integrazione.</p> <p>Q3_ f'' è calcolata correttamente Trova il flesso</p> <p>Scrive l'equazione della retta tangente</p> <p>Q4_ Calcola l'integrale con le condizioni al contorno Genera l'equazione canonica dell'iperbole Applica correttamente una procedura per la ricerca dell'asintoto obliquo Risolve una forma indeterminata irrazionale.</p> <p>Q5_ Calcola l'asintoto orizzontale</p>	6
	L2	Formalizza situazioni problematiche in modo parziale e applica gli strumenti matematici e disciplinari in modo non sempre corretto per la loro risoluzione	7 - 15		
	L3	Formalizza situazioni problematiche in modo quasi completo e applica gli strumenti matematici e disciplinari generalmente corretto per la loro risoluzione	16 - 24		
	L4	Formalizza situazioni problematiche in modo completo ed esauriente e applica gli strumenti matematici e disciplinari corretti ed ottimali per la loro risoluzione	25 - 30		
<p>Interpretare, rappresentare, elaborare i dati</p> <p>Interpretare e/o</p>	L1	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo superficiale non verificandone la pertinenza al modello scelto	0 - 5	<p>Q3_ Verifica il flesso F dal grafico Verifica la corrispondenza</p>	5

<p>elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici.</p>	L2	<p>Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo parziale verificandone la pertinenza al modello scelto in modo non sempre corretto</p>	6 - 12	<p>con la tangente in F fornita</p> <p>Q4_ Riconosce che la funzione primitiva è riconducibile ad una iperbole</p> <p>Q5_ Capisce che in un intorno di zero $v = at$ (moto rett. uniformemente accelerato) e per $t \rightarrow +\infty$ $v = cost = c$ (moto rett. uniforme)</p>	
	L3	<p>Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo completo verificandone la pertinenza al modello scelto in modo corretto</p>	13 - 19		
	L4	<p>Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo completo ed esauriente verificandone la pertinenza al modello scelto in modo corretto ed ottimale</p>	20 - 25		
<p>Argomentare</p> <p>Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.</p>	L1	<p>Descrive il processo risolutivo adottato in modo superficiale e comunica con un linguaggio specifico non appropriato i risultati ottenuti non valutando la coerenza con la situazione problematica proposta</p>	0 - 4	<p>Q1_ Spiega perché associa / esclude grafici</p> <p>Q2_ Espone la relazione tra f ed f'</p> <p>Q5_ Espone le caratteristiche delle scelte effettuate nell'associare moti e modello</p>	4
	L2	<p>Descrive il processo risolutivo adottato in modo parziale e comunica con un linguaggio specifico non sempre appropriato i risultati ottenuti valutandone solo in parte la coerenza con la situazione problematica proposta</p>	5 - 10		
	L3	<p>Descrive il processo risolutivo adottato in modo completo e comunica con un linguaggio specifico appropriato i risultati ottenuti valutandone nel complesso la coerenza con la situazione problematica proposta</p>	11 - 16		

	L4	Descrive il processo risolutivo adottato in modo completo ed esauriente e comunica con un linguaggio specifico appropriato i risultati ottenuti e ne valuta la coerenza con la situazione problematica proposta in modo ottimale	17 - 20		
TOTALE			56/100		11/20

Nota: Q1, Q2, ..., Q5 si riferiscono allo specifico quesito del problema