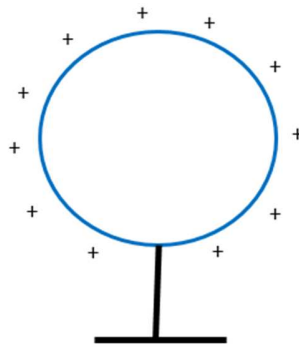


Problema Gruppo 3b

Sfera cava elettrizzata

Nel laboratorio di fisica una sfera metallica cava di diametro 30 cm, posta su un sostegno isolante, è stata caricata positivamente con una carica $Q = 3.0 \mu C$.



Sappiamo che il potenziale da essa generato è descritto da una funzione del tipo

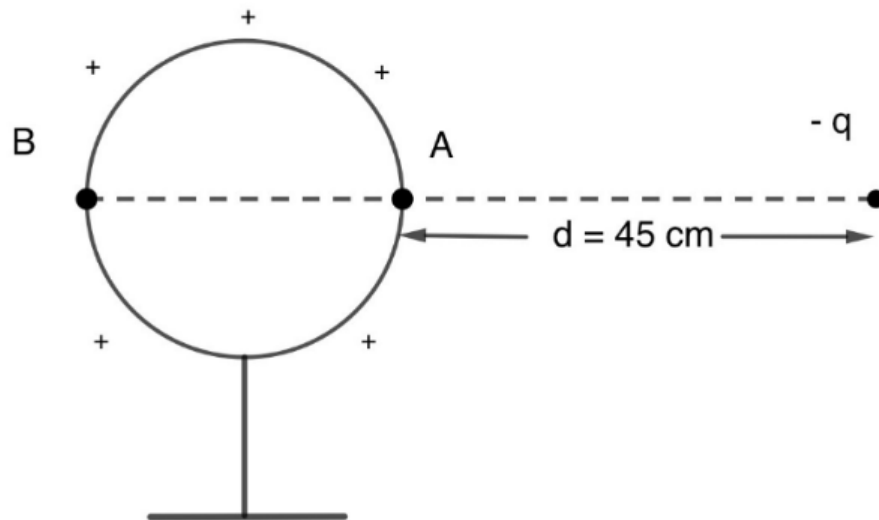
$$V(r) = \begin{cases} \frac{k_0 Q}{R} & 0 \leq r \leq R \\ \frac{k_0 Q}{r} & r > R \end{cases} \quad \text{dove } k_0 = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}, R \text{ è il raggio della sfera e } r \text{ è la distanza dal}$$

centro.

1) Rappresenta la funzione $V(r)$ sul piano cartesiano, discuti la natura matematica del punto di ascissa R e giustifica l'andamento della funzione $V(r)$ dal punto di vista fisico.

2) A partire dalla funzione assegnata ricava la funzione campo elettrico, giustifica il procedimento utilizzato e rappresentala nel piano cartesiano

La sfera ha due fori diametralmente opposti di diametro 1 mm come nella sezione rappresentata in figura.



Ad un certo istante t_0 una particella di carica $q = -2.0 \text{ nC}$ e massa $m = 0.60 \text{ g}$ è ferma nelle vicinanze della sfera ad una distanza $d = 45 \text{ cm}$ dalla sua superficie.

3) Dopo aver descritto il moto della particella sotto la sola azione del campo elettrico, determina, nel caso in cui essa penetri nella sfera attraverso il foro A, modulo, direzione e verso dell'accelerazione nell'istante t_0 e nell'istante in cui essa esce dal secondo foro B.

4) Ricordando il principio di conservazione dell'energia meccanica totale, si esprima il modulo della velocità della particella, v , in funzione della distanza r dal centro della sfera, e si rappresenti il grafico di $v(r)$ nell'intervallo compreso tra 0 e la distanza dal centro della posizione iniziale della particella.

5) Alla luce di quanto già analizzato relativamente al moto della particella estendi la rappresentazione grafica e/o la formulazione analitica di $v(r)$ all'intero moto della particella.

Risoluzione

PUNTO 1

La funzione proposta è data dalla legge

$$V(r) = \begin{cases} 1.8 \cdot 10^5 & 0 \leq r \leq \frac{3}{20} \\ \frac{2.7 \cdot 10^4}{r} & r > \frac{3}{20} \end{cases}$$

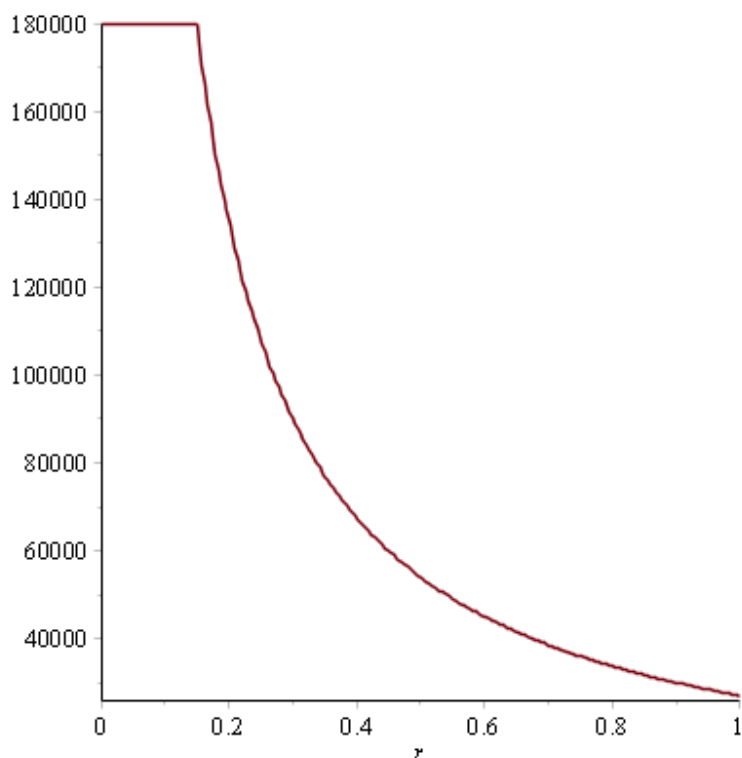
ed è formata da una funzione costante per $0 \leq r \leq \frac{3}{20}$ e da un ramo di iperbole per $r > \frac{3}{20}$

Per $R = \frac{3}{20}$ la funzione è continua in quanto , $\lim_{r \rightarrow \left(\frac{3}{20}\right)^+} \frac{2.7 \cdot 10^4}{r} = \lim_{r \rightarrow \left(\frac{3}{20}\right)^-} 1.8 \cdot 10^5 = 1.8 \cdot 10^5$

Inoltre
$$V'(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < \frac{3}{20} \\ -\frac{2.7 \cdot 10^4}{r^2} & r > \frac{3}{20} \end{cases}$$

poiché $\lim_{r \rightarrow \left(\frac{3}{20}\right)^+} \frac{-2.7 \cdot 10^4}{r^2} = -1.2 \cdot 10^6$ e $\lim_{r \rightarrow \left(\frac{3}{20}\right)^-} 0 = 0$

Il grafico quindi è dato da:



Il potenziale è costante sulla superficie e all'interno di un conduttore carico, mentre all'esterno si comporta come quello del campo generato da una carica puntiforme collocata nel centro della sfera e di valore uguale a quello della carica sulla sfera.

punto 2

La funzione richiesta è

$$E(r) = \begin{cases} 0 \\ \frac{2.7 \cdot 10^4}{r^2} \end{cases}$$

sappiamo infatti che $E(r) = - \frac{dV(r)}{dr}$ con E all'esterno della sfera diretto radialmente con verso centrifugo perché la sfera è carica positivamente.

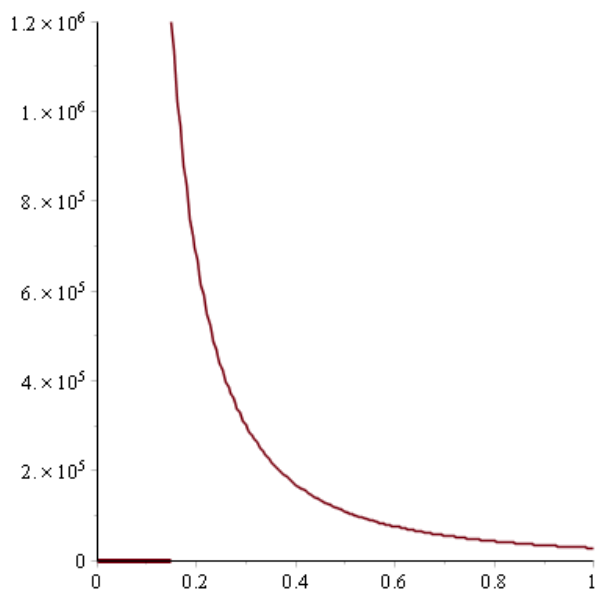
La funzione $E(r)$ è definita per $r > 0$, è sempre positiva ed è discontinua nel punto di ascissa $r = \frac{3}{20}$

$$E'(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < \frac{3}{20} \\ -\frac{5.4 \cdot 10^4}{r^3} & r > \frac{3}{20} \end{cases}$$

la derivata è negativa per $r > \frac{3}{20}$ quindi in tale insieme la funzione è decrescente mentre la derivata seconda

$$E''(r) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < \frac{3}{20} \\ \frac{16.2 \cdot 10^4}{r^4} & r > \frac{3}{20} \end{cases}$$

è positiva per $r > \frac{3}{20}$ e il grafico è dato da



Infatti il campo elettrico è nullo all'interno di un conduttore carico, mentre all'esterno è radiale con verso centrifugo perché la sfera è carica positivamente. L'intensità è equivalente a quella di un campo generato da una carica puntiforme collocata nel centro della sfera e di valore uguale a quello della carica sulla sfera.

punto 3

La particella è accelerata dalla forza del campo elettrico in direzione radiale lungo la congiungente dei due fori e con modulo crescente man mano che si avvicina alla sfera; all'interno di essa, dove il campo e la forza elettrica sono nulli, la particella si muove con velocità costante in modulo e direzione,

pertanto uscirà dal foro diametralmente opposto a quello da cui è entrata; infine, all'esterno della sfera, essa sarà decelerata dalla forza del campo, con modulo decrescente man mano che si allontana dalla sfera, fino a fermarsi e a invertire il moto che, in assenza di attrito, vista la simmetria del sistema è periodico.

I valori richiesti sono dati da: $a = \frac{F}{m} = \frac{k_0}{m} \cdot \frac{Qq}{r^2}$ in quanto sappiamo dalla seconda legge di Newton che $F = ma$ e che la forza elettrostatica agente è data da $F = k_0 \cdot \frac{Qq}{r^2}$

$$a_1 = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}}{6 \cdot 10^{-4} kg} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot C \cdot 2 \cdot 10^{-9} \cdot C}{(60 \cdot 10^{-2})^2 m^2} = \frac{1}{4} \frac{m}{s^2}$$

$$a_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \frac{Nm^2}{C^2}}{6 \cdot 10^{-4} \cdot kg} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot C \cdot 2 \cdot 10^{-9} \cdot C}{(15 \cdot 10^{-2})^2 \cdot m^2} = \frac{4 m}{s^2}$$

punto 4

L'energia totale durante il moto della particella si conserva perché il campo elettrico è conservativo. Mentre la particella si avvicina alla sfera, l'energia cinetica aumenta a spese dell'energia potenziale; all'interno della sfera sia l'energia cinetica che l'energia potenziale restano invariate perché, come spiegato precedentemente, nessuna forza agisce sulla particella; infine quando la particella esce dalla sfera, durante il moto l'energia cinetica si riduce e aumenta l'energia potenziale, fino a assumere, quest'ultima, il valore iniziale in una posizione che sarà simmetrica di quella iniziale rispetto al centro della sfera.

Sappiamo che l'equazione che esprime la conservazione dell'energia meccanica è data da:

$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k_0Q \cdot q}{r}$; da essa ricavo l'equazione che esprime la velocità della particella in funzione della posizione. Tenendo conto dei dati sapendo che nell'istante iniziale in cui la particella è ferma

l'energia è solo potenziale e quindi $E_{tot} = E_p = -\frac{9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot 3 \cdot 10^{-6} C \cdot 2 \cdot 10^{-9} \cdot C}{60 \cdot 10^{-2} m} = -9 \cdot 10^{-5} \cdot J$

In tutti gli altri punti $E_{tot} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot v^2 - \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{r}$. Uguagliando si ha:

$$-\frac{9}{100000} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10^{-4} \cdot v^2 - \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{r}$$

$$v^2 = \frac{18 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{r \cdot 6 \cdot 10^{-4}} - \frac{18}{6 \cdot 10^{-4} \cdot 100000} = \frac{9}{50r} - \frac{3}{10}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{9}{50r} - \frac{3}{10}}. \text{ In } r = 3/20 \text{ si ha: } v = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{18}{r} - 30} = \frac{1}{10} \sqrt{90}$$

$$v(r) = \begin{cases} \frac{1}{10} \sqrt{\frac{18}{r} - 30} & \frac{3}{20} < r \leq \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} \sqrt{10} & 0 \leq r \leq \frac{3}{20} \end{cases}$$

La funzione esiste $0 < r \leq \frac{3}{5}$ per in tale insieme è sempre positiva e continua in quanto ,

$$\lim_{r \rightarrow \left(\frac{3}{20}\right)^+} \frac{1}{10} \sqrt{\frac{18}{r} - 30} = \lim_{r \rightarrow \left(\frac{3}{20}\right)^-} \frac{3}{10} \sqrt{10} = \frac{3}{10} \sqrt{10}$$

La derivata prima ha l'espressione:

$$v'(r) = \begin{cases} -\frac{9}{10 \sqrt{\frac{18}{r} - 30} r^2} & \frac{3}{20} < r < \frac{3}{5} \\ 0 & 0 \leq r \leq \frac{3}{20} \end{cases}$$

La derivata prima è negativa a per ogni $\frac{3}{20} < r < \frac{3}{5}$ e quindi la velocità è una funzione sempre decrescente in tale intervallo mentre è costante per $0 < r \leq \frac{3}{20}$

Nel punto di ascissa $x = \frac{3}{5}$ la derivata prima della funzione non esiste in quanto

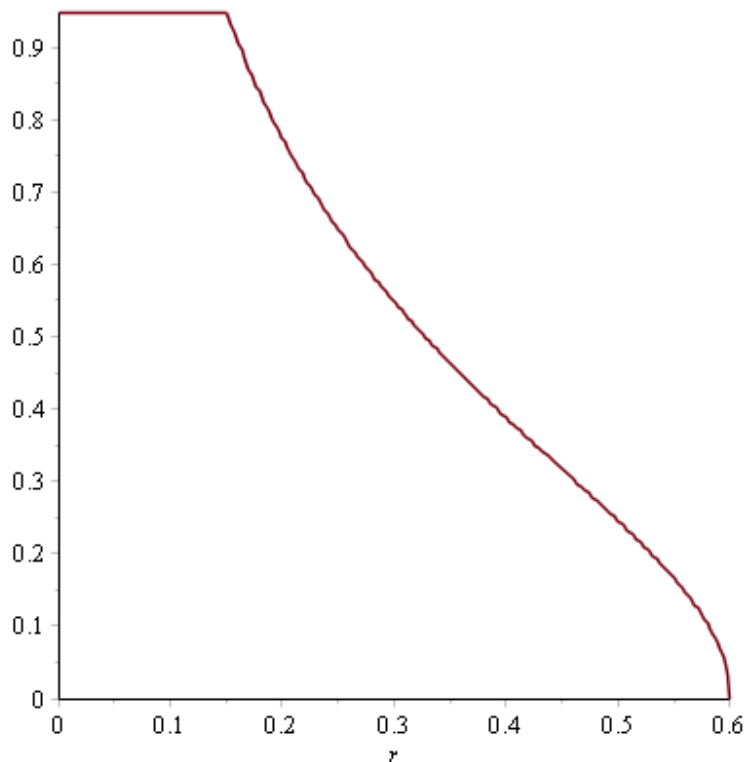
$$\lim_{r \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^-} -\frac{9}{10 \sqrt{\frac{18}{r} - 30} r^2} = -\infty$$

e quindi la funzione in tale punto ha un tangente verticale .

$$v''(r) = \begin{cases} \frac{9 \cdot (9 - 20r)}{20 \left(\frac{3}{r} - 5\right) \sqrt{\frac{18}{r} - 30} \cdot r^4} & \frac{3}{20} < r < \frac{3}{5} \\ 0 & 0 < r < \frac{3}{20} \end{cases}$$

Tale derivata risulta positiva per $\frac{9}{20} < r \leq \frac{3}{5}$ (concavità verso l'alto), negativa per $\frac{3}{20} < r < \frac{9}{20}$ (concavità verso il basso) e nulla per $r = \frac{9}{20}$ dove è presente un punto di flesso di coordinate $\left(\frac{9}{20}, \frac{1}{10} \sqrt{10}\right)$

Il suo grafico è dato da:

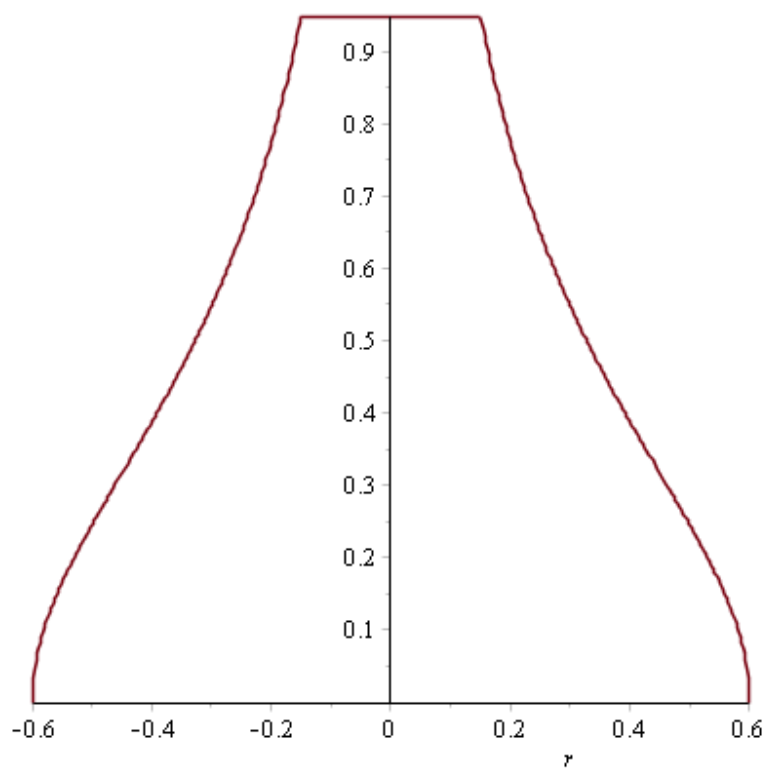


punto 5

Facendo riferimento all'analisi del moto discussa al punto 3 e 4 e in particolare all'informazione che il moto è simmetrico rispetto al centro della sfera la legge che esprime il modulo della velocità è data :

$$v(r) = \begin{cases} \frac{1}{10} \sqrt{\frac{18}{|r|} - 30} & -\frac{3}{5} \leq r < -\frac{3}{20} \\ \frac{3}{10} \sqrt{10} & -\frac{3}{20} \leq r < \frac{3}{20} \\ \frac{1}{10} \sqrt{\frac{18}{|r|} - 30} & \frac{3}{20} \leq r < \frac{3}{5} \end{cases}$$

e il grafico è dato da :



RUBRICA DI VALUTAZIONE

Problema: Sfera cava elettrizzata

Indicatori	Livello	Descrittori	Punti	Evidenze	Punteggio massimo
<p>Analizzare</p> <p>Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.</p>	L1	Esamina la situazione fisica proposta in modo superficiale e/o frammentario formulando ipotesi esplicative non adeguate senza riconoscere modelli o analogie o leggi	0 - 5	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Analizza la situazione fisica per determinare la funzione Campo elettrico ▪ Descrive il moto della particella sotto la sola azione del campo elettrico ▪ Analizza la situazione fisica per determinare la direzione e il verso dell'accelerazione ▪ Analizza il moto tenendo conto del principio di conservazione dell'energia totale 	5
	L2	Esamina la situazione fisica proposta in modo parziale formulando ipotesi esplicative non del tutto adeguate e riconoscendo modelli o analogie o leggi non sempre appropriate	6 - 12		
	L3	Esamina la situazione fisica proposta in modo quasi completo formulando ipotesi esplicative complessivamente adeguate e riconoscendo modelli o analogie o leggi generalmente appropriate	13 - 19		
	L4	Esamina criticamente la situazione fisica proposta in modo completo ed esauriente formulando ipotesi esplicative adeguate e riconoscendo modelli o analogie o leggi appropriati	20 - 25		
<p>Sviluppare il processo risolutivo</p> <p>Formalizzare situazioni problematiche e applicare i</p>	L1	Formalizza situazioni problematiche in modo superficiale e non applica gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione	0 - 6	<ul style="list-style-type: none"> ▪ A partire dalla funzione assegnata ricava la funzione campo elettrico dal punto di vista matematico 	6
	L2	Formalizza situazioni problematiche in	7 - 15		

<p>concetti e i metodi matematici e gli strumenti disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.</p>		<p>modo parziale e applica gli strumenti matematici e disciplinari in modo non sempre corretto per la loro risoluzione</p>		<ul style="list-style-type: none"> ▪ Calcola il modulo dell'accelerazione ▪ Determinare la direzione e il verso dell'accelerazione ▪ Fissa un sistema di riferimento per ricavare la legge della velocità ▪ Ricava in funzione di r la legge della velocità e la studia ▪ Convertire le unità nel sistema internazionale 	
	L3	<p>Formalizza situazioni problematiche in modo quasi completo e applica gli strumenti matematici e disciplinari generalmente corretto per la loro risoluzione</p>	16 - 24		
	L4	<p>Formalizza situazioni problematiche in modo completo ed esauriente e applica gli strumenti matematici e disciplinari corretti ed ottimali per la loro risoluzione</p>	25 - 30		
<p>Interpretare, rappresentare, elaborare i dati</p> <p>Interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici</p>	L1	<p>Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo superficiale non verificandone la pertinenza al modello scelto</p>	0 - 5	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Caratterizza dal punto di vista matematico il punto di ascissa R 	5
	L2	<p>Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo parziale verificandone la pertinenza al modello scelto in modo non sempre corretto</p>	6 - 12	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Rappresenta la funzione $V(r)$ in un piano cartesiano ▪ Rappresenta la funzione campo elettrico 	
	L3	<p>Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo completo verificandone la pertinenza al modello scelto in modo corretto</p>	13 - 19	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Rappresenta il grafico della velocità, ▪ Interpreta la rappresentazio 	

grafico-simbolici.	L4	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, in modo completo ed esauriente verificandone la pertinenza al modello scelto in modo corretto ed ottimale	20 - 25	ne grafica e/o la formulazione analitica all'intero moto della particella	
--------------------	----	---	----------------	---	--

Argomentare Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.	L1	Descrive il processo risolutivo adottato in modo superficiale e comunica con un linguaggio specifico non appropriato i risultati ottenuti non valutando la coerenza con la situazione problematica proposta	0 - 4	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Giustifica dal punto di vista fisico l'andamento del potenziale ▪ Giustifica il procedimento utilizzato per la ricerca della funzione Campo elettrico ▪ Discute il moto della particella dal punto di vista della conservazione dell'energia meccanica totale e ▪ Discute il moto della particella sotto l'azione del campo elettrico ▪ Discute l'estensione della rappresentazione grafica e/o la formulazione analitica all'intero moto della particella 	4
	L2	Descrive il processo risolutivo adottato in modo parziale e comunica con un linguaggio specifico non sempre appropriato i risultati ottenuti valutandone solo in parte la coerenza con la situazione problematica proposta	5 - 10		
	L3	Descrive il processo risolutivo adottato in modo completo e comunica con un linguaggio specifico appropriato i risultati ottenuti valutandone nel complesso la coerenza con la situazione problematica proposta	11 - 16		
	L4	Descrive il processo risolutivo adottato in modo completo ed esauriente e comunica con un linguaggio specifico appropriato i risultati ottenuti e ne valuta la coerenza con la situazione problematica proposta in modo ottimale	17 - 20		
TOTALE		/100	/20

Esempio numerico;

indicatore 1: punteggio 13/25 (liv. 3) rapportato a 5 $13:25=x:5$ $x=(13/25)*5=2,6$

indicatore 2: punteggio 7/30 (liv. 2) rapportato a 6 $x=1,4$

indicatore 3: punteggio 19/25 (liv. 3) rapportato a 5 $x=3,8$

indicatore 4: punteggio 17/20 (liv. 4) rapportato a 4 $x=3,4$

VOTO del compito 11/20 (arrotondato per difetto 11,2)