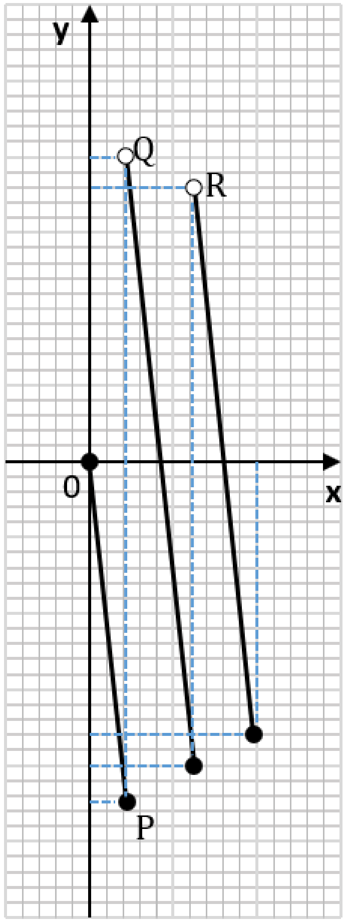
Gruppo 2: problema b

Dancing ball

La funzione $f(x)$ ha grafico formato da tratti rettilinei paralleli come riportato in figura con

$$P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -2\sqrt{5}\right),\ Q\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 4\right) \text{ e } R\left(\frac{\sqrt{5}+4}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5}\right).$$



Si richiede di:

1. Determinare la forma analitica della funzione $f(x)$. Tracciare quindi il grafico della funzione $F(x)$, continua, passante per il punto $A\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)$ e primitiva di $f(x)$ nell'insieme $(0,5) \cup (5,15) \cup (15,22)$.

2. Analizzare la derivabilità della funzione $F(x)$ nel suo intervallo di definizione, determinando in particolare l'ampiezza dell'angolo formato dalle rette tangenti in prossimità degli eventuali punti angolosi.

Nel laboratorio di fisica si analizza sperimentalmente il moto di una pallina da tennis lasciata cadere da un metro di altezza.
La misura della massa della pallina ha riportato il valore (58 ± 1) g.
Con l'ausilio di un sensore di posizione si misura la distanza palla-sensore e da questa si ricava la distanza h palla-pavimento al variare del tempo.
La tabella a fianco riporta un set di dati tempo-posizione finché la pallina tocca terra tre volte.

t [s]	*h ±0,02 [m]*
0,00	1,00
0,24	0,78
0,36	0,41
0,48	0,07
0,60	0,45
0,72	0,70
0,88	0,81
1,04	0,67
1,20	0,29
1,28	0,00
1,36	0,25
1,48	0,51
1,64	0,64
1,80	0,52
1,92	0,27
2,00	0,02

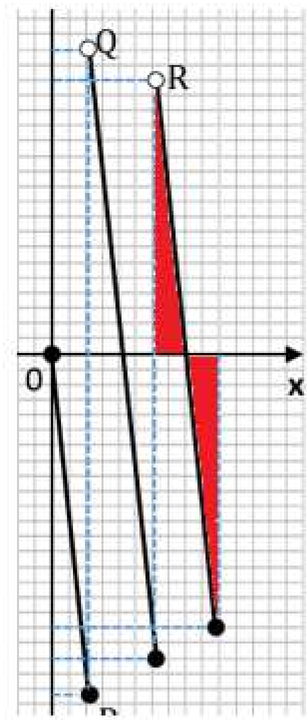
Si richiede di:

3. Rappresentare graficamente i dati in tabella e dal grafico ottenuto discutere le caratteristiche cinematiche del moto. Spiegare perché il modello matematico studiato al punto 1. risulta adeguato per descrivere la situazione fisica proposta.
4. Analizzare il fenomeno dal punto di vista energetico mettendo in evidenza le trasformazioni dell'energia meccanica che interessano l'intero processo.
   Stimare, inoltre, la percentuale di energia dissipata ad ogni rimbalzo, assumendo come valori di altezza massima quelli evinti dalla tabella.
5. Verificare che le quote della pallina corrispondenti alle massime altezze raggiunte ad ogni rimbalzo seguono un andamento del tipo $y = Ae^{-bx}$ effettuando una stima per i valori delle costanti A e b reali positive corrispondenti al caso trattato.

Soluzione

1. Il grafico fornito rappresenta una funzione lineare a tratti della forma

$$f(x)=\begin{cases} -10x & se \quad 0\le x\le \dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ -10x+2\sqrt{5}+4 & se \quad \dfrac{\sqrt{5}}{5}<x\le \dfrac{\sqrt{5}+4}{5} \\ -10x+\dfrac{18\sqrt{5}}{5}+8 & se \quad \dfrac{\sqrt{5}+4}{5}<x\le \dfrac{13\sqrt{5}+20}{25} \end{cases}$$



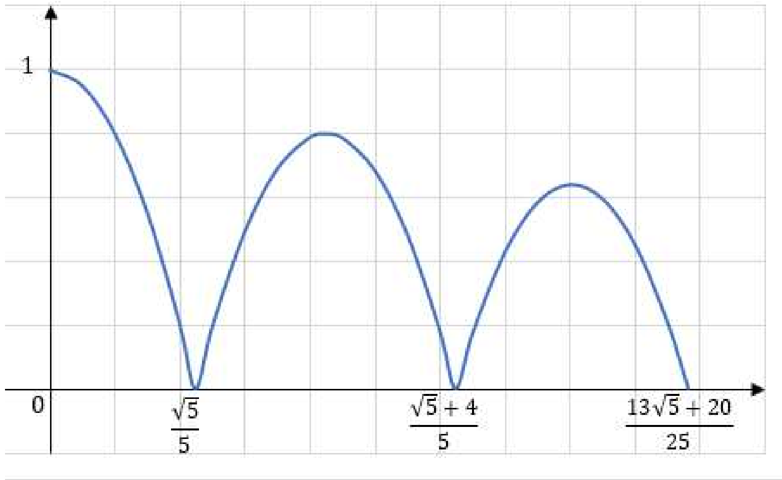
dove:

- per il primo tratto, l'equazione è quella della retta passante per O e P
- per il secondo tratto, l'equazione è quella della retta passante per Q e parallela alla prima
- per il terzo tratto, l'equazione è quella della retta passante per R e parallela alle altre
- per la determinazione dell'estremo superiore dell'insieme di definizione si è considerata la congruenza dei triangoli rettangoli evidenziati in figura.

Visto che il grafico della $f(x)$ consiste di tratti di rette parallele, quello della funzione $F(x)$ consistera' di archi di una stessa parabola a meno di traslazioni. Inoltre, considerato che $F'(x)=f(x)$ e $F''(x)=f'(x)$:

- dal segno di $f(x)$ ricaviamo crescenza, decrescenza max e min di $F(x)$
- dalla crescenza e decrescenza di $f(x)$ ricaviamo concavità e convessità di $F(x)$
- per il primo tratto $F(x)=-5x^2+c_1$ e si ricava facilmente $c_1=1$ imponendo il passaggio per $A\left(\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)$
- il fatto che la pendenza delle rette tangenti alle parabole nelle intersezioni con l'asse x vada diminuendo, sta ad indicare che l'ordinata del vertice diminuisce passando da una parabola alla successiva.

Da quanto detto si ricava il seguente grafico per la funzione $F(x)$:



2. La funzione $F(x)$ è derivabile negli intervalli $(0,\frac{\sqrt{5}}{5}) \cup (\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}+4}{5}) \cup (\frac{\sqrt{5}+4}{5},\frac{13\sqrt{5}+20}{25})$.

I punti A$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)$ e B$\left(\frac{\sqrt{5}+4}{5},0\right)$ sono punti angolosi perché esistono finite le derivate destra e sinistra, ma i valori non coincidono, come dimostrano i seguenti limiti calcolati utilizzando i valori noti di $F'(x) = f(x)$:

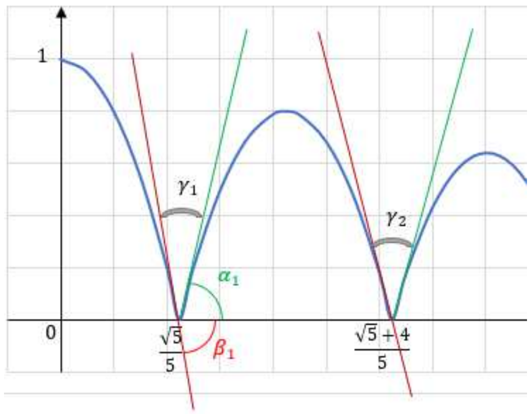
$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{5}}{5}^-} f(x) = -2\sqrt{5} \text{ e } \lim_{x\to\frac{\sqrt{5}}{5}^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{5}+4}{5}^-} f(x) = -4 \text{ e } \lim_{x\to\frac{\sqrt{5}+4}{5}^+} f(x) = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

Le derivate destra e sinistra calcolate nei punti considerati forniscono i valori dei coefficienti angolari delle rette tangenti ai corrispondenti rami del grafico in prossimita' dei punti considerati.

Nel punto A di ascissa $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ l'angolo formato dalle due tangenti risulta essere

$$\gamma_1 = 180° - \alpha_1 + \beta_1 =$$
$$= 180° - \tan^{-1}(4) + \tan^{-1}(-2\sqrt{5}) = 26{,}64°$$

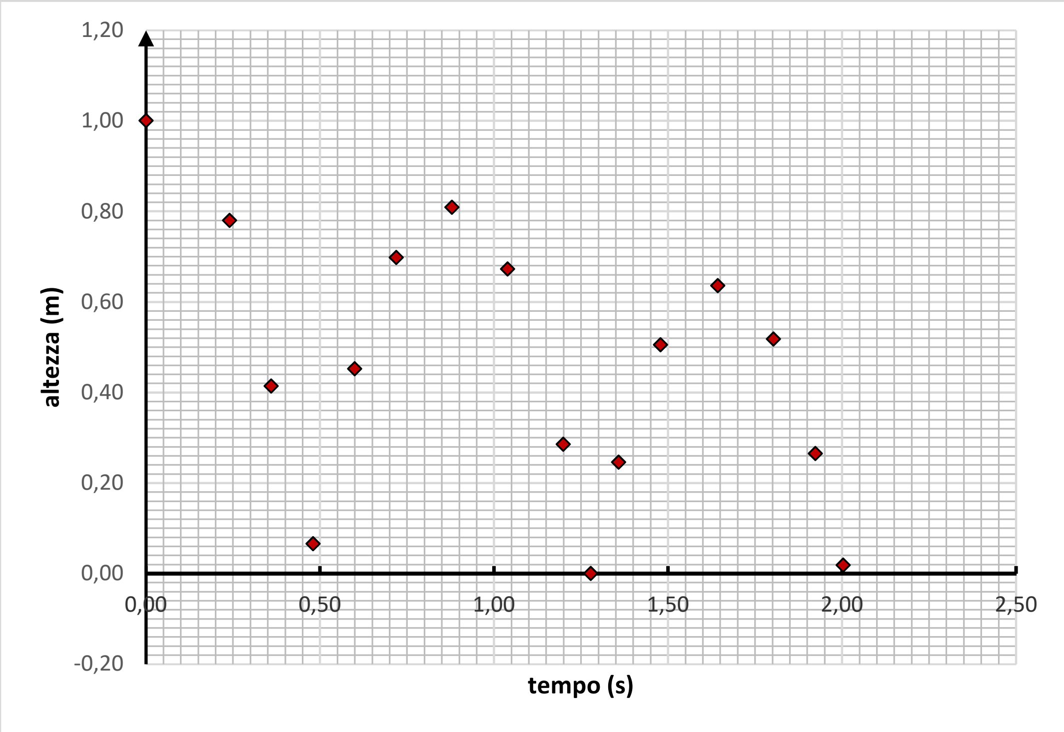


Analogamente, nel punto B di ascissa $x = \frac{\sqrt{5}+4}{5}$:

$$\gamma_2 = 180° - \alpha_2 + \beta_2 =$$
$$= 180° - \tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right) + \tan^{-1}(-4) = 29{,}65°$$

3.

t (s)	h(m)
0,00	1,00
0,24	0,78
0,36	0,41
0,48	0,07
0,60	0,45
0,72	0,70
0,88	0,81
1,04	0,67
1,20	0,29
1,28	0,00
1,36	0,25
1,48	0,51
1,64	0,64
1,80	0,52
1,92	0,27
2,00	0,02



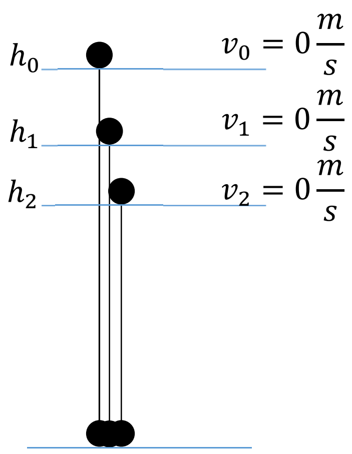
Dal grafico ottenuto osserviamo la fase di prima caduta, della durata di circa mezzo secondo, in cui la pallina si porta dalla posizione iniziale $h_0 = 1{,}00\ m$ fino a terra. In questa fase la velocità (pendenza della curva $h(t)$) passa da zero a un valore massimo negativo indicando che si tratta di un moto accelerato nel verso opposto rispetto al riferimento fissato.

Successivamente la pallina rimbalza, raggiunge un'altezza $h_1 = 0{,}81m$ e si riporta a terra presentando un moto simmetrico, prima decelerato verso l'alto, e poi accelerato verso il basso. Questa seconda fase ha una durata di circa otto decimi di secondo e la simmetria indica che il moto avviene con accelerazione costante.

La terza fase, di circa sette decimi di secondo, corrisponde al rimbalzo successivo della pallina, con caratteristiche analoghe alla fase precedente ma con velocità iniziale minore ed altezza massima raggiunta più bassa $h_2 = 0{,}64m$.

Il grafico sperimentale mostra, per la legge oraria $h = h(t)$ che descrive il moto della pallina, lo stesso andamento della $y = F(x)$ considerata al punto 1. pertanto quest'ultima funzione costituisce il modello matematico che descrive la situazione fisica presentata.

Inoltre, essendo $v(t) = h'(t)$ l'equazione che esprime l'andamento della velocità al passare del tempo, si deduce che la funzione $y = f(x)$ trattata al punto 1. costituisce il modello matematico per la velocità della pallina.



4. Dal punto di vista energetico, durante le fasi in aria di discesa e di risalita, si presenta una situazione di conservazione dell'energia meccanica (attrito viscoso trascurabile) con continue trasformazioni di energia potenziale gravitazionale in energia cinetica e viceversa. Nell'impatto col suolo avviene invece una dissipazione di energia cinetica in calore poiché la pallina tocca terra con una velocità v_t maggiore rispetto a quella $v_{t'}$ con cui rimbalza.

Per la conservazione dell'energia, nella prima discesa:

$$E_{TOT\,0} = E_{TOT\,t1} \quad \Longrightarrow \quad mgh_0 = \frac{1}{2}mv_{t1}$$

Durante la prima risalita:

$$E_{TOT\,t1'} = E_{TOT\,1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}mv_{t1'} = mgh_1$$

Per la percentuale di energia dissipata nel primo urto col suolo si ottiene:

$$\Delta E_1\% = \frac{\Delta E_1}{E_1} \cdot 100 = \frac{E_{TOT\,t1} - E_{TOT\,t1'}}{E_{TOT\,t1}} \cdot 100 = \frac{mgh_0 - mgh_1}{mgh_0} \cdot 100 = \frac{h_0 - h_1}{h_0} \cdot 100$$

Dai valori della tabella si può stimare: $h_0 = 1{,}00m$, $h_1 = 0{,}81m$ e $h_2 = 0{,}64m$

Utilizzando tali valori si trova:

$$\Delta E_1\% = \frac{h_0 - h_1}{h_0} \cdot 100 = \frac{1.00m - 0{,}81m}{1{,}00m} \cdot 100 = 19\%$$

Analogamente, per il secondo impatto:

$$\Delta E_{21}\% = \frac{h_1 - h_2}{h_1} \cdot 100 = \frac{0{,}81m - 0{,}64m}{0{,}81m} \cdot 100 = 21\%$$

5. Per verificare che le quote della pallina corrispondenti alle massime altezze h_{MAX} raggiunte ad ogni rimbalzo seguono un andamento del tipo $y = Ae^{-bx}$, mostriamo che i punti (t_0, h_0), (t_1, h_1) e (t_2, h_2), con i corrispondenti valori numerici ricavati dalla tabella, sono in accordo con una legge del tipo:

$$h(t) = Ae^{-bt}$$

Per il primo punto:

$$h_0 = Ae^{-bt_0} \quad \Longrightarrow \quad 1{,}00m = Ae^{-b\cdot 0s} \quad \Longrightarrow \quad A = 1{,}00m$$

Per il terzo punto:

$$h_2 = Ae^{-bt_2} \quad \Longrightarrow \quad 0{,}64m = 1{,}00m \cdot e^{-b\cdot 1{,}64s} \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{ln\frac{0{,}64m}{1{,}00m}}{1{,}64s} = 0{,}27s^{-1}$$

Proviamo ora se il secondo punto verifica l'equazione:

$$h(t) = 1{,}00m \cdot e^{-0{,}27s^{-1}\cdot t}$$

$$h(t_2) = 1{,}00m \cdot e^{-0{,}27s^{-1}\cdot t_2}$$

$$h(0{,}88m) = 1{,}00m \cdot e^{-0{,}27s^{-1}\cdot 0{,}88s} = 0{,}79m$$

Il valore sperimentale di $h_2 = 0{,}81m$ risulta vicino al valore calcolato per $h(t_2) = 0{,}79m$,

$$0{,}81m \approx 0{,}79m$$

cioè i due valori si possono ritenere compatibili entro gli errori di misura

NUCLEI TEMATICI FONDAMENTALI (di riferimento per il problema)

Matematica: INSIEMI E FUNZIONI

- Proprietà delle funzioni
- Calcolo differenziale

Fisica: MISURA E RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE FISICHE

- Rappresentazioni di grandezze fisiche

SPAZIO, TEMPO E MOTO

- Grandezze cinematiche
- Moto di un punto materiale

ENERGIA E MATERIA

- Conservazione dell'energia
- Trasformazione dell'energia

Obiettivi della prova (che intervengono nel problema)

Matematica

- Studiare rette, coniche e loro intersezioni nel piano nonché rette, piani, superfici sferiche e loro intersezioni nello spazio utilizzando le coordinate cartesiane
- Individuare le caratteristiche fondamentali e i parametri caratteristici delle progressioni aritmetiche e geometriche e delle funzioni polinomiali, lineari a tratti, razionali fratte, circolari, esponenziali e logaritmiche, modulo e loro composizioni semplici.
- Riconoscere le caratteristiche di continuità e derivabilità di una funzione e applicare i principali teoremi riguardanti la continuità e la derivabilità.
- Determinare la derivata di una funzione ed interpretarne geometricamente il significato.
- A partire dal grafico di una funzione, tracciare i grafici della sua derivata e di una sua funzione integrale.
- Determinare primitive di funzioni utilizzando integrali immediati, integrazione per sostituzione o per parti.

Fisica

- Rappresentare, anche graficamente, il valore di una grandezza fisica e la sua incertezza nelle unità di misura appropriate. Rappresentare e interpretare, tramite un grafico, la relazione tra due grandezze fisiche.
- Valutare l'accordo tra i valori sperimentali di grandezze fisiche in relazione alle incertezze di misura al fine di descrivere correttamente il fenomeno osservato.
- Determinare e discutere il moto di punti materiali e corpi rigidi sotto l'azione di forze.

- Mettere in relazione la variazione di energia cinetica, di energia potenziale e di energia meccanica con il lavoro fatto dalle forze agenti.
- Utilizzare la conservazione dell’energia nello studio del moto di punti materiali e di corpi rigidi e nelle trasformazioni tra lavoro e calore.

Indicatori	Livello	Descrittori	Punti	Evidenze	Punteggi o massimo
Analizzare Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.	L1	Esamina la situazione fisica proposta **in modo superficiale e/o frammentario** formulando ipotesi esplicative **non adeguate senza riconoscere modelli** o analogie o leggi	**0 - 5**	▪ Analizza la situazione sperimentale proposta (3.) ▪ Individua le caratteristiche cinematiche del moto (3.) ▪ Esamina la situazione fisica dal punto di vista energetico, riconoscendo fasi di conservazione e non-conservazione dell'energia meccanica (4.)	**5**
	L2	Esamina la situazione fisica proposta **in modo parziale** formulando ipotesi esplicative **non del tutto adeguate** e **riconoscendo** modelli o analogie o leggi **non sempre appropriate**	**6 - 12**		
	L3	Esamina la situazione fisica proposta **in modo quasi completo** formulando ipotesi esplicative **complessivamente adeguate** e **riconoscendo** modelli o analogie o leggi **generalmente appropriate**	**13 - 19**		
	L4	**Esamina criticamente** la situazione fisica proposta in modo **completo ed esauriente** formulando ipotesi esplicative **adeguate** e riconoscendo modelli o analogie o leggi **appropriati**	**20 - 25**		
Sviluppare il processo risolutivo Formalizzare	L1	Formalizza situazioni problematiche **in modo superficiale** e **non applica** gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la	**0 - 6**	▪ Determina l'equazione della $f(x)$ (1.) ▪ Traccia il grafico della primitiva $F(x)$	**6**

situazioni problematiche e applicare i concetti e i metodi matematici e gli strumenti disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.		loro risoluzione		(1.) ▪ Analizza la derivabilità della $F(x)$ (2.) ▪ Determina l'angolo formato dalle rette tangenti nei punti angolosi (2.) ▪ Esegue i calcoli necessari per quantificare l'energia dissipata e la esprime in percentuale (4.) ▪ Stima i valori di A e b corrispondenti ai dati sperimentali forniti (6.)	
	L2	Formalizza situazioni problematiche **in modo parziale** e applica gli strumenti matematici e disciplinari **in modo non sempre corretto** per la loro risoluzione	**7– 15**		
	L3	Formalizza situazioni problematiche **in modo quasi completo** e applica gli strumenti matematici e disciplinari **generalmente corretto** per la loro risoluzione	**16 - 24**		
	L4	Formalizza situazioni problematiche **in modo completo ed esauriente** e applica gli strumenti matematici e disciplinari **corretti ed ottimali** per la loro risoluzione	**25 - 30**		
Interpretare, rappresentare, elaborare i dati Interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici.	L1	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo superficiale non verificandone** la pertinenza al modello scelto	**0 - 5**	▪ Individua dal grafico proposto le informazioni utili per la determinazione di $f(x)$ (1.) ▪ Rappresenta graficamente i dati forniti (3.) ▪ Riconosce la corrispondenza tra il modello matematico e la situazione fisica sperimentale (5.)	**5**
	L2	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo parziale** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo non sempre corretto**	**6 - 12**		
	L3	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo completo** verificandone la pertinenza al modello	**13 - 19**		

		scelto **in modo corretto**			
	L4	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo completo ed esauriente** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo corretto ed ottimale**	**20 - 25**		
Argomentare Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.	L1	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo superficiale** e comunica **con un linguaggio specifico** non **appropriato** i risultati ottenuti **non** valutando la coerenza con la situazione problematica proposta	**0 - 4**	▪ Descrive il processo risolutivo nei suoi passaggi con le relative equazioni (*tutti*) ▪ Motiva le scelte effettuate sulla base dei dati forniti, delle ipotesi formulate o del modello esplicativo adottato (*tutti*) ▪ Comunica adoperando il linguaggio specifico. (*tutti*) ▪ Valuta la coerenza dei risultati ottenuti con la situazione proposta (1.-2.-5.-6.)	**4**
	L2	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo parziale** e comunica **con un linguaggio specifico** non **sempre appropriato** i risultati ottenuti valutandone **solo in parte** la coerenza con la situazione problematica proposta	**5 - 10**		
	L3	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo completo** e comunica **con un linguaggio specifico** appropriato i risultati ottenuti valutandone **nel complesso** la coerenza con la situazione problematica proposta	**11 - 16**		
	L4	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo completo ed esauriente** e comunica **con un linguaggio**	**17 - 20**		

		specifico appropriato i risultati ottenuti e ne valuta la coerenza con la situazione problematica proposta **in modo ottimale**			
TOTALE					