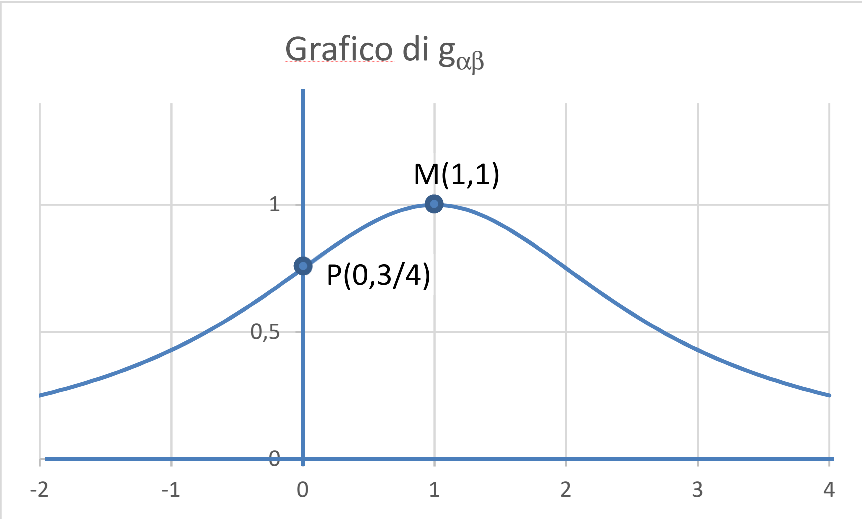
Problema Gruppo 1c

La curva Lorentziana

Fissati due parametri reali α e β, con $\beta > 0$, considera la funzione reale di una variabile reale:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\beta}{(x-\alpha)^2 + \beta}$$

Figura 1:



1. Determina i valori di α e β corrispondenti alla funzione $g_{\alpha\beta}$ rappresentata in figura 1, evidenziando che le caratteristiche principali della funzione così individuata sono in accordo con la funzione rappresentata in figura.

2. Calcola l'area della regione di piano delimitata dal grafico di $g_{1,3}(x)$, dall'asse delle x e dalle rette parallele all'asse y passanti per i punti di flesso.

3. Per k reale positivo, posto $I(k) = \int_{\alpha-k}^{\alpha+k} g_{1,3}(x)dx$ calcola il limite $A = \lim_{k\to\infty} I(k)$

4. Determina il valore di k per cui I(k) = A/2 e verifica che $g_{1,3}(\alpha+k)$ e $g_{1,3}(\alpha-k)$ sono entrambi pari alla metà del massimo della funzione. Il valore 2k e' detto *larghezza a mezza altezza*.

La funzione precedentemente studiata è utilizzata in spettroscopia con il nome di Lorentziana per descrivere la forma delle righe spettrali, ovvero l'andamento in funzione della lunghezza d'onda λ dell'intensità della radiazione elettromagnetica raccolta da uno spettrometro (vedi figura 2):

$$J(\lambda) = C\frac{\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2}{(\lambda-\alpha)^2+\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2} \quad \text{con } C > 0 \text{ e } \beta = \left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2$$

in cui la *larghezza a mezza altezza* 2k è indicata con $\Delta\lambda$, e C è un fattore moltiplicativo diverso per ogni riga spettrale.

In un esperimento utilizzi uno spettrometro per verificare la legge di emissione per l'atomo di idrogeno nello spettro visibile (serie di Balmer):

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right), \; n\, intero\, maggiore\, di\, 2 \quad (1)$$

dove $R_H = 1{,}097 \times 10^7\ m^{-1}$ è la costante di Rydberg per l'idrogeno. In tabella sono riportati i valori della lunghezza d'onda delle righe spettrali osservate per un campione di idrogeno atomico (fig. 2).

$\lambda\ [10^{-9}\mathrm{m}]$
390 ± 6
412 ± 2
435 ± 2
485 ± 2
656 ± 2

Tabella 1: posizione (λ) dei massimi delle righe spettrali osservate in figura 2

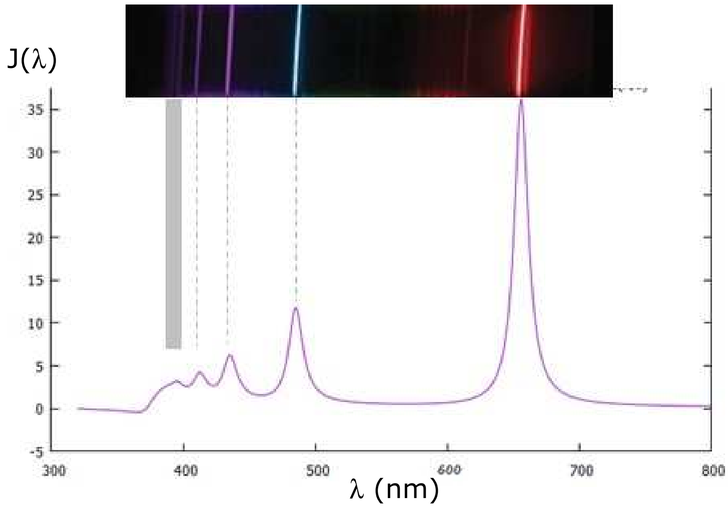
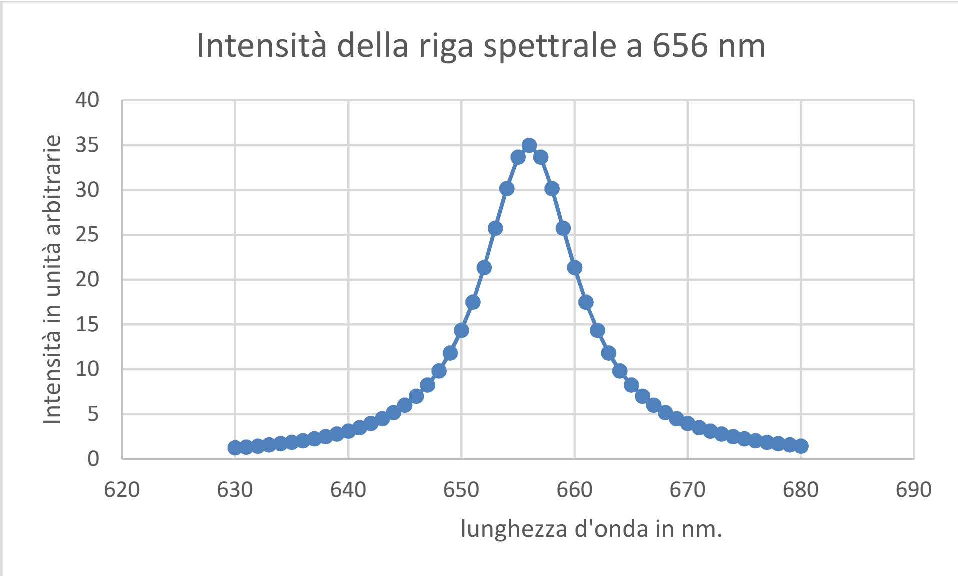


Figura 2: in alto lo spettro di emissione di H monoatomico e in basso l'intensità delle righe spettrali in funzione della lunghezza d'onda della radiazione λ

5. Verifica se i dati in tabella sono compatibili con la legge (1) tenendo conto dell'incertezza di misura e interpretali da un punto di vista teorico utilizzando il modello di atomo di Bohr.

6. Come puoi osservare dal grafico in figura 2 al diminuire della lunghezza d'onda le linee spettrali si avvicinano e quando la distanza tra esse è minore di Δλ si confondono in un unico segnale. Utilizzando la formula (1) di cui sopra, determina il valore massimo di n per cui si riesce ad osservare una riga distinta se $\Delta\lambda$ =10 nm e confronta il risultato con lo spettro in figura. Spiega l'origine della banda continua osservabile in figura 2 per lunghezze d'onda piccole.

7. Determina il valore del parametro ⍰⍰ della curva Lorentziana che descrive il profilo della riga spettrale a 656 nm mostrata in figura 2 e riportata con maggior dettaglio nella figura seguente.



TRACCIA DI RISOLUZIONE

1. I valori di α e β si ottengono imponendo che la funzione passi per i punti P e M; si ottiene così il sistema di equazioni: $\frac{3}{4} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta}$ e $1 = \frac{\beta}{(1-\alpha)^2 + \beta}$, la cui soluzione risulta essere con $\alpha = 1$ e $\beta = 3$.
   Si chiede di verificare che la funzione proposta con $\alpha = 1$ e $\beta = 3$ $g_{1,3}(x)$ rispetti le caratteristiche evidenziate nel grafico quindi che abbia come dominio **R**, abbia un massimo in M(1,1), presenti due flessi simmetrici rispetto ad M e che tenda a zero all'infinito.
   La funzione $g_{1,3}(x) = \frac{3}{(x-1)^2+3}$ è razionale fratta, ha come denominatore una somma di numeri positivi e pertanto non si annullerà mai, quindi D=**R.**
   Derivando la funzione si ottiene:
   $$g'_{1,3}(x) = \frac{-6x+6}{[(x-1)^2+3]^2}$$
   che si annulla proprio per x=1, è positiva per x<1 e negativa per x>1 quindi M è un massimo
   La derivata seconda risulta essere
   $$g''_{1,3}(x) = \frac{18x^2 - 36x}{[(x-1)^2+3]^3}$$
   che si annulla per x=0 e x=2, risulta positiva per x<0 e x>2 e negativa per 0<x<2; il punto P ed il punto Q(2; ¾) sono pertanto flessi e sono inoltre simmetrici rispetto al punto M.
   Applicando il teorema di De L'Hospital si ottiene che $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{(x-1)^2+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{0}{2x-2} = 0$
   I risultati precedenti consentono di affermare che il grafico proposto è compatibile con quello della funzione $g_{1,3}(x) = \frac{3}{(x-1)^2+3}$, come richiesto.

2. Le ascisse dei punti di flesso sono quelle dei punti P e Q determinate precedentemente, l'area richiesta si calcola pertanto risolvendo $\int_0^2 \frac{3}{(x-1)^2+3} dx = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} [arctg\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)]_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$

(Si poteva giungere allo stesso risultato riconoscendo che la funzione $g_{1,3}(x)$è la traslazione di vettore $\vec{v}(1;0)$ della funzione pari $f(x) = \frac{3}{x^2+3}dx$ e quindi l'area corrisponde a

$$\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2+3}dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} \frac{3}{x^2+3}dx = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}[arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \ \ )$$

3. L'integrale richiesto per $\alpha = 1$ risulta essere

$$I(k) = \int_{1-k}^{1+k} g_{1,3}(x)dx = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}[arctg\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)]_{1-k}^{1+k} = 2\sqrt{3}arctg\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)$$

Il valore di A= $\lim_{k\to\infty} I(k) = \lim_{k\to\infty} 2\sqrt{3}arctg\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{3}$

4. Si chiede di risolvere l'equazione $\frac{A}{2} = I(k)$, che utilizzando il risultato del punto 3 diventa

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,arctg\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right); \qquad arctg\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ ; da cui } \frac{k}{\sqrt{3}} = 1 \text{ e quindi } k = \sqrt{3}$$

Sostituendo nell'espressione della funzione, si ottiene facilmente $g_{1,3}(1 \pm \sqrt{3}) = \frac{1}{2}$ che è proprio pari alla metà del massimo della funzione (che si ha nel punto M).

5. Per analizzare la compatibilità dei dati sperimentali con la legge (1) si può ricavare in maniera esplicita l'espressione della lunghezza d'onda $\lambda = \frac{4n^2}{R_H \cdot (n^2-4)}$ e sostituire via via i valori di n e confrontarli con quelli sperimentali proposti.
Per n=3 si ottiene $\lambda = 656$ nm che rientra nell'intervallo $(654; 658)nm$, rendendo il dato compatibile con la (1), con n=4 si ottiene $\lambda = 486nm$ che rientra nell'intervallo $(483; 487)nm$ e via di seguito fino ad n=6
Il primo valore in tabella invece che rientra nell'intervallo $(384; 396)nm$ è invece compatibile con i valori di n= 8,9,10.

La spiegazione dei risultati sperimentali ottenuti da Balmer, sintetizzati nella legge (1) e messi in evidenza dalla figura 2, si è avuta con l'introduzione del modello atomico di Bohr.
Secondo tale modello l'atomo di idrogeno è costituito da un elettrone negativo che ruota attorno ad un nucleo positivo percorrendo delle orbite circolari ben definite, dette orbite stazionarie; percorrendo un orbita stazionaria l'elettrone non irraggia, ma può emettere o assorbire energia solo durante la fase di transizione passando da un'orbita a un'altra secondo la relazione $\Delta E = hf$. Da qui il fatto che lo spettro sia discreto e non continuo.
Secondo il modello di Bohr, il momento angolare orbitale è quantizzato, esso può cioè assumere solo valori pari ad un multiplo intero della costante di Planck ridotta e l'energia totale associata all'atomo di idrogeno con l'elettrone nei vari livelli energetici n è inversamente proporzionale ad n^2 secondo la relazione $E_n = \frac{-13,6}{n^2}eV$.

6. Per determinare il massimo valore di n che consente di osservare una riga distinta si procede valutando le differenze di lunghezze d'onda ottenute per valori consecutivi di n e controllando se risulta essere minore di 10 nm:

$$\lambda_{3-}\lambda_4 = 656nm - 484nm = 170n > 10nm$$
$$\lambda_{4-}\lambda_5 = 484nm - 434 = 52nm > 10nm$$
$$\lambda_{5-}\lambda_6 = 434nm - 410nm = 24nm > 10nm$$

$$\lambda_{6-}\lambda_7 = 410nm - 397nm = 13nm > 10nm$$
$$\lambda_{7-}\lambda_8 = 397nm - 389nm = 8nm < 10nm$$

Come si nota, per n>7 il vincolo fissato da $\Delta\lambda = 10nm$ non è più rispettato.

Per lunghezze d'onda basse, come notato anche al punto 5. non si riescono più a distinguere nettamente le diverse righe di emissione che pertanto diventando sempre più vicine vanno a fondersi in un'unica banda larga.

7. Dalla figura 3 si nota che il valore massimo di intensità, ottenuto in corrispondenza di $\lambda = 656nm$, vale 35 (unità arbitrarie).
   Ricollegandosi a quanto ottenuto al punto 4, per rispondere alla domanda si devono cercare i valori di lunghezza d'onda corrispondenti al valore di intensità pari a 17,5 (u.a.) metà del massimo e calcolare la loro differenza, tale valore corrisponde alla *larghezza a metà altezza*.
   Come si può notare il valore 17,5 (u.a.) si ottiene in corrispondenza di $\lambda_1 = 651nm$ e $\lambda_2 = 661nm$; si noti come anche in questo caso i due valori sono simmetrici rispetto al valore massimo in accordo con quanto trovato nell'analisi della funzione $g_{1,3}(x)$.
   Il valore quindi della *larghezza a mezza altezza*, corrisponde a 10nm

Indicatori	Livello	Descrittori	Punti	Evidenze	Punteggio massimo
Analizzare Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.	L1	Esamina la situazione fisica proposta **in modo superficiale e/o frammentario** formulando ipotesi esplicative **non adeguate senza riconoscere modelli** o analogie o leggi	**0 - 5**	▪ Riconosce il legame tra il susseguirsi delle righe e i corrispondenti numeri quantici. ▪ Riconosce il modello di Bohr per l'atomo di Idrogeno. ▪ Riconosce l'utilità della Lorentziana per descrivere la forma delle righe spettrali, ▪ Riconosce il legame tra l'intensità totale di ogni lunghezza d'onda e la larghezza della riga	**5**
	L2	Esamina la situazione fisica proposta **in modo parziale** formulando ipotesi esplicative **non del tutto adeguate** e **riconoscendo** modelli o analogie o leggi **non sempre appropriate**	**6 - 12**		
	L3	Esamina la situazione fisica proposta **in modo quasi completo** formulando ipotesi esplicative **complessivamente adeguate** e **riconoscendo** modelli o analogie o leggi **generalmente appropriate**	**13 - 19**		
	L4	**Esamina criticamente** la situazione fisica proposta in modo **completo ed esauriente** formulando ipotesi esplicative **adeguate** e riconoscendo modelli o analogie o leggi **appropriati**	**20 - 25**		
Sviluppare il processo risolutivo Formalizzare situazioni problematiche e applicare i concetti e i metodi matematici e gli strumenti	L1	Formalizza situazioni problematiche **in modo superficiale** e **non applica** gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione	**0 - 6**	▪ Utilizza le informazioni contenute nel grafico. ▪ Utilizza il concetto di appartenenza di un punto a una funzione. ▪ Dimostra che il grafico raffigurato	**6**
	L2	Formalizza situazioni problematiche **in modo parziale** e applica gli strumenti matematici e disciplinari **in modo non**	**7 – 15**		

disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.		**sempre corretto** per la loro risoluzione		rappresenta la funzione $g_{1,3}(x)$. ▪ Calcola le derivate prima e seconda della funzione $g_{1,3}(x)$. ▪ Determina i punti di flesso. ▪ Calcola l'area della regione di piano delimitata dal grafico di $g_{1,3}(x)$, dall'asse delle x e dalle rette parallele all'asse y passanti per i punti di flesso. ▪ Riconosce e descrive gli elementi di simmetria della funzione f(x) e li utilizza nel calcolo. ▪ Calcola integrali del tipo $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ ▪ Calcola analoghi integrali definiti ed impropri. ▪ Calcola la larghezza a mezza altezza ▪ Determina il valore massimo di n per cui si riesce ad osservare una riga distinta se $\Delta\lambda$ =10 nm	
	L3	Formalizza situazioni problematiche **in modo quasi completo** e applica gli strumenti matematici e disciplinari **generalmente corretto** per la loro risoluzione	**16 - 24**		
	L4	Formalizza situazioni problematiche **in modo completo ed esauriente** e applica gli strumenti matematici e disciplinari **corretti ed ottimali** per la loro risoluzione	**25 - 30**		

Interpretare, rappresentare, elaborare i dati Interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici.	L1	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo superficiale non verificandone** la pertinenza al modello scelto	**0 - 5**	▪ Individua nel grafico sperimentale e nella corrispondente tabella le posizioni dei massimi di lunghezza d'onda in relazione ad n. ▪ Confronta le informazioni fornite dalla tabella e dal grafico sperimentale con i dati teorici ottenuti applicando la formula di Balmer. ▪ Utilizza le informazioni del grafico sperimentale per dedurre il massimo valore di n che permette di separare i massimi di riga. ▪ Identifica il valore del parametro [illegible] per la riga a 656 nm (tabella 1)	**5**
	L2	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo parziale** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo non sempre corretto**	**6 - 12**		
	L3	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo completo** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo corretto**	**13 - 19**		
	L4	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo completo ed esauriente** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo corretto ed ottimale**	**20 - 25**		
Argomentare Descrivere il processo risolutivo adottato, la	L1	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo superficiale** e comunica **con un linguaggio specifico** non **appropriato** i risultati ottenuti **non** valutando la	**0 - 4**	▪ Verifica che $g_{1,3}(\alpha \pm k)$ è pari alla metà del massimo della funzione.	**4**

<table>
<tr><td rowspan="4">strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.</td><td></td><td>coerenza con la situazione problematica proposta</td><td></td><td rowspan="4">Giustifica il passaggio al limite nel calcolo dell’intensità.
Descrive il collegamento tra grafico sperimentale e lunghezze d’onda.
Spiega l’origine della banda continua osservabile in figura 2 per lunghezze d’onda piccole.
Interpreta i dati in tabella da un punto di vista teorico utilizzando il modello di atomo di Bohr.</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>L2</td><td>Descrive il processo risolutivo adottato in modo parziale e comunica con un linguaggio specifico non sempre appropriato i risultati ottenuti valutandone solo in parte la coerenza con la situazione problematica proposta</td><td>5 - 10</td></tr>
<tr><td>L3</td><td>Descrive il processo risolutivo adottato in modo completo e comunica con un linguaggio specifico appropriato i risultati ottenuti valutandone nel complesso la coerenza con la situazione problematica proposta</td><td>11 - 16</td></tr>
<tr><td>L4</td><td>Descrive il processo risolutivo adottato in modo completo ed esauriente e comunica con un linguaggio specifico appropriato i risultati ottenuti e ne valuta la coerenza con la situazione problematica proposta in modo ottimale</td><td>17 - 20</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="right">TOTALE</td><td>56/100</td><td></td><td>11/20</td></tr>
</table>

Esempio numerico;
indicatore 1: punteggio 13/25 (liv. 3) rapportato a 5 13:25=x:5 x=(13/25)*5=2,6
indicatore 2: punteggio 7/30 (liv. 2) rapportato a 6 x=1,4
indicatore 3: punteggio 19/25 (liv. 3) rapportato a 5 x=3,8
indicatore 4: punteggio 17/20 (liv. 4) rapportato a 4 x=3,4 VOTO del compito 11/20 (arrotondato per difetto 11,2)