Problema Gruppo 1b

IL MECCANO E L'INDUZIONE

Un telaio di materiale conduttore è composto da quattro barrette incernierate negli estremi in modo da formare un rombo di forma variabile.

Ogni barretta è lunga L e ha una resistenza elettrica R.

Il punto O della struttura è fisso mentre l'estremo A è vincolato a muoversi sull'asse delle x (vedi figura). La deformazione del telaio avviene gradualmente aumentando l'angolo **θ** tra la barretta OC e l'asse x, da 0 a $\frac{\pi}{2}$, con velocità angolare costante ω. L'evoluzione del moto fra t=0 s e t = t_{fin} è illustrata in figura.

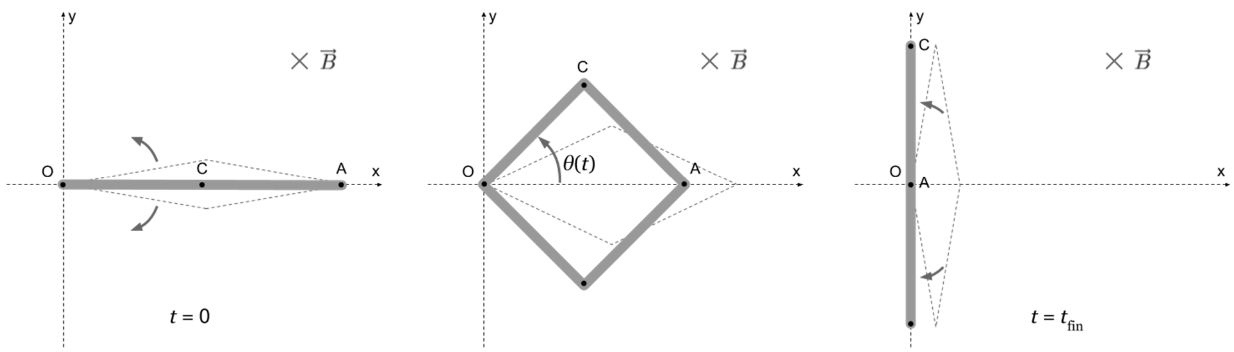


Figura 1

Il telaio è inserito in un campo magnetico uniforme di intensità B perpendicolare al suo piano, con verso entrante nel foglio. Durante la deformazione viene indotta una corrente elettrica nel telaio.

1) Spiega la natura di questa corrente *i* individuandone il verso durante la fase di apertura e chiusura del telaio.
2) Durante la deformazione si riscontrano delle forze resistenti (diverse dagli attriti): spiega la natura di tali forze e perché devono opporsi alla deformazione.

3) Scrivi l'espressione della funzione *i(t)* che descrive l'intensità di corrente in funzione del tempo e disegnane il grafico in un opportuno sistema di riferimento.

4) Se $R=10^{-3}\Omega$, $\omega=1$ rad/s, B è il campo magnetico terrestre pari a $0,5\ 10^{-4}$ T, L=0,2 m calcola il valore medio della potenza elettrica erogata durante la fase da t=0 secondi a $t = t_{fin}$.

   In figura è rappresentata una tipica batteria di uno smartphone; ritieni la potenza erogata dal meccano da t=0 secondi e $t=t_{fin}$ sufficiente per ricaricare il tuo smartphone? (utilizza le specifiche della batteria per questa valutazione quantitativa).

5) Detta x l'ascissa del punto C, vertice superiore del rombo, verifica che l'area della superficie del telaio al variare di x può essere descritta dall'espressione $S(x) = 2|x|\sqrt{L^2 - x^2}$ e studia tale funzione S(x) nell'intervallo [-L; L], discutendone la derivabilità, determinandone gli eventuali punti stazionari e tracciane il grafico.

6) Detti M il massimo della funzione S(x) nel primo quadrante e J il punto di coordinate (L; 0), calcola la probabilità che, scelto a caso un punto Q nella regione di piano Σ delimitata dal grafico della funzione e dal segmento OJ, Q si trovi all'interno del triangolo di vertici OJM.

Soluzione

Spiega la natura di questa corrente i individuandone il verso nelle varie fasi

Le correnti sono legate alla variazione del flusso del campo magnetico concatenato e seguono la legge di Faraday-Neumann-Lenz

$$i(t) = -\frac{1}{R_{tot}}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Più precisamente, la variazione del flusso concatenato risulta essere dovuta alla variazione della superficie del meccano, in quanto il campo magnetico $\vec{B}$ ha modulo costante. Dato che in una prima fase la superficie concatena aumenta e in una seconda fase diminuisce, la corrente circola in verso prima antiorario e poi in verso orario. Il verso della corrente è sempre tale da generare un campo magnetico indotto che si oppone alla variazione di flusso.

Durante la deformazione si riscontrano delle forze resistenti (diverse dagli attriti): spiega la natura di tali forze e perché devono opporsi alla deformazione.

La forza che si oppone può essere spiegata dal punto di vista delle correnti o dal punto di vista microscopico.
Dal punto di vista delle correnti, far variare la superficie del meccano genera delle correnti che risentono della forza $\vec{F}_{resistente} = i\vec{l} \wedge \vec{B}$ che complessivamente si oppongono alla forza agita dall'esterno.
Dal punto di vista microscopico, la deformazione del meccano sposta nel campo magnetico gli elettroni presenti all'interno delle sbarrette (che di fatto acquisiscono una velocità $\vec{v}$ non nulla rispetto al campo stesso) per cui risentono di una forza di Lorentz pari a $\vec{F}_{Lorentz} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Scrivi l'espressione della funzione $i(t)$ che esprime la corrente in funzione del tempo e disegnane il grafico in un opportuno nel piano cartesiano

In base a quanto detto sopra

$$i(t) = -\frac{1}{R_{tot}}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{1}{R_{tot}} f.e.m.$$

La resistenza totale R_{tot} del circuito è pari a quattro volte la resistenza della singola sbarretta

$$R_{tot} = 4R$$

All'istante t la superficie concatenata $A(t)$ del meccano risulta essere data da

$$A(t) = L^2 \sin(2\theta(t))$$

Il meccano si deforma con una velocità angolare costante per cui $\theta(t) = \omega t$.
Il campo magnetico risulta essere costante in modulo e in verso, e parallelo al vettore superficie del meccano, per cui:

$$\Phi(\vec{B})_A = \vec{A} \cdot \vec{B} = AB$$

Risulta quindi che la corrente indotta $i(t)$ è pari a

$$i(t) = -\frac{1}{R_{tot}}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{1}{4R}\frac{d}{dt}\left(BL^2 \sin(2\omega t)\right) = \frac{\omega BL^2}{2R}\cos(2\omega t)\,.$$

Il grafico di questa funzione è il grafico di una funzione elementare ottenibile con una dilatazione su entrambi gli assi

Se $R=10^{-3}\Omega$, ω=1 rad/s, B è il campo magnetico terrestre pari a 0,5 10^{-4} T, L=0,2 m calcola il valore medio della potenza elettrica erogata durante la fase da t=0 secondi a t = t_{fin}. Ritieni tale potenza sufficiente per ricaricare il tuo smartphone? Motiva la risposta.

Assumendo che per potenza del circuito si intenda la potenza associata alla f.e.m. indotta, possiamo dire che tale potenza è: $P = i \cdot f.e.m. = R_{tot} i^2(t) = 4R\left(\frac{\omega BL^2}{2R}\cos(2\omega t)\right)^2 = \frac{\omega^2 B^2 L^4}{R}\cos^2(2\omega t)$

Il valore medio della potenza può essere ottenuto con il teorema della media integrale. Calcoliamo il tempo che ci impiega il meccano ad aprirsi: l'angolo complessivo risulta essere pari a $\pi/2$, e il sistema procede a velocità angolare costante ω per cui

$$t_{fin} = \frac{\pi/2}{\omega} = \frac{\pi}{2}s$$

La potenza media è data da

$$\overline{P} = \frac{1}{t_{fin}}\int_0^{t_{fin}} \frac{\omega^2 B^2 L^4}{R}\cos^2(2\omega t)dt = \frac{\omega^2 B^2 L^4}{R}\cdot\frac{1}{2\omega t_{fin}}\int_0^{2\omega t_{fin}}\cos^2(2\omega t)d(2\omega t) = \frac{\omega^2 B^2 L^4}{2R} = 2\ 10^{-9}\ W$$

La potenza così ottenuta risulta essere decisamente molto più piccola rispetto a quella tipica di un caricatore da smartphone. La potenza erogata da quest'ultimo è stimabile dai dati forniti: assumendo un tempo di carica di circa 1h, la potenza risulta essere $P_{caricatore} \approx 7{,}6$ W. Utilizzando il meccano come caricatore, impiegheremmo un tempo pari a circa $4\cdot10^9$ h ossia circa $5\cdot10^5$ anni. La risposta è quindi negativa.

Detta x l'ascissa del punto C, vertice superiore del rombo, verifica che l'area della superficie del telaio al variare di x può essere descritta dall'espressione $S(x) = 2|x|\sqrt{L^2 - x^2}$

Le coordinate del punto C, per il teorema di Pitagora, sono $C = (x, \sqrt{L^2 - x^2})$. La lunghezza del segmento $\overline{OA}$ è pari a due volte il modulo dell'ascissa del punto C. La superficie è pari al doppio dell'area del triangolo ACO ed è data da:

$$S = 2\left(\frac{\overline{AO}\cdot y_C}{2}\right) = 2|x|\sqrt{L^2 - x^2}.$$

Studia la funzione $S(x)$ nel suo dominio determinandone i punti stazionari e discutendone la derivabilità, e tracciane il grafico.

Assumiamo che la funzione $S(x)$ sia scorrelata dal suo significato iniziale.
Il dominio è dato dalla condizione di esistenza della radice: $L^2 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -L \leq x \leq L$. In tale dominio la funzione è continua e non presenta discontinuità.
La funzione è pari; infatti:

$$S(-x) = 2|-x|\sqrt{L^2 - (-x)^2} = 2x\sqrt{L^2 - x^2} = S(x).$$

Effettueremo lo studio solo nell'intervallo $[0; L]$.
In tale intervallo $S(x)$ risulta essere positiva e si annulla nei punti $x = 0$ e $x = L$.
La derivata $S'(x)$ è pari a

$$S'(x) = 2\frac{L^2 - 2x^2}{\sqrt{L^2 - x^2}}.$$

La derivata risulta non essere definita per $x = L$, valore per cui il denominatore si annulla.

$S'(x)$ è positiva se il numeratore è positivo, ossia quando $L^2 - 2x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow 0 < x \leq \frac{\sqrt{2}L}{2}$, mentre è negativa per $\frac{\sqrt{2}L}{2} < x < L$. Lo studio del segno evidenzia quindi la presenza di un massimo M di

coordinate $M = \left(\frac{\sqrt{2}L}{2}; L^2\right)$.

Studiamo i due punti estremi dell'intervallo $[0; L]$.
Nel punto $x = 0$ la $S(x)$ ha una tangente t data da

$$t : \, y = S'(0)x + S(0) = 2Lx$$

Il punto $x = L$ è un punto di non derivabilità; si ha infatti che

$$\lim_{x \to L^-} 2\frac{L^2 - 2x^2}{\sqrt{L^2 - x^2}} = -\infty \, .$$

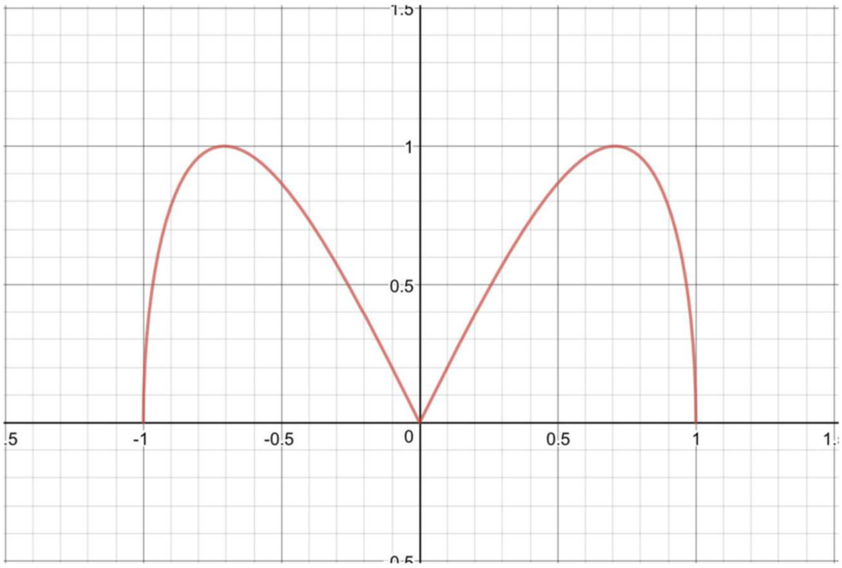
Passiamo a studiare la derivata seconda $S''(x)$; otteniamo esplicitamente

$$S''(x) = \frac{dS'(x)}{dx} = 2x\frac{2x^2 - 3L^2}{(L^2 - x^2)^{3/2}}$$

Questa funzione è minore di zero in ogni punto appartenente all'intervallo $(0; L)$. Per il dominio, il denominatore risulta essere sempre positivo, x è positivo e il fattore $2x^2 - 3L^2$ risulta essere sempre negativo.
La funzione ha una concavità rivolta verso il basso. Si annulla invece per $x = 0$, che corrisponde ad un punto angoloso dato dalla presenza del modulo. Di seguito le tangenti t e t':

$$t : \, y = 2Lx \, , \qquad t' : \, y = -2Lx \, .$$

Di seguito il grafico con tutte le informazioni per $L = 1$.



Detti M il massimo della funzione $S(x)$ e G il punto di coordinate $(L; 0)$, calcola la probabilità che, scelto a caso un punto Q nella regione di piano Σ delimitata dal grafico della funzione e dall'asse delle ascisse, Q si trovi all'interno del triangolo di vertici OMG.

Valutiamo la probabilità secondo la definizione di casi favorevoli su casi possibili. I casi favorevoli corrispondono all'area del triangolo OMG, pari $A(OMG) = \frac{1}{2}L \cdot L^2 = \frac{1}{2}L^3$.
I casi possibili corrispondono alla porzione di piano compresa fra il grafico di $S(x)$ e l'asse delle ascisse pari a

$$A_{tot} = \int_{-L}^{L} |S(x)| dx = 2\int_0^L \left(2x\sqrt{L^2 - x^2}\right) dx =$$

$$= -2\int_0^L \left(-2x(L^2 - x^2)^{1/2}\right) dx = 2\left[-\frac{(L^2 - x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^L = \left[-\frac{4}{3}\sqrt{L^2 - x^2}\right]_0^L = \frac{4}{3}L^3 .$$

La probabilità $\mathcal{P}$ richiesta risulta quindi essere data da

$$\mathcal{P} = \frac{A(OMG)}{A_{tot}} = \frac{L^3/2}{4L^3/3} = \frac{3}{8}$$

Indicatori	Livello	Descrittori	Punti	Evidenze	Punteggio massimo
Analizzare Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.	L1	Esamina la situazione fisica proposta **in modo superficiale e/o frammentario** formulando ipotesi esplicative **non adeguate senza riconoscere modelli** o analogie o leggi	**0 - 5**	▪ Spiega l'esistenza di una corrente elettrica indotta attraverso la legge di Faraday-Neumann-Lenz. ▪ Determina il verso della corrente elettrica indotta attraverso la legge di Faraday-Neumann-Lenz. ▪ Interpreta la potenza media come valor di una funzione. ▪ Spiega la natura delle forze resistenti come conseguenza della legge di Biot-Savart oppure come conseguenza della forza di Lorentz. ▪ Individua le aree per il calcolo della probabilità.	**5**
	L2	Esamina la situazione fisica proposta **in modo parziale** formulando ipotesi esplicative **non del tutto adeguate** e **riconoscendo** modelli o analogie o leggi **non sempre appropriate**	**6 - 12**		
	L3	Esamina la situazione fisica proposta **in modo quasi completo** formulando ipotesi esplicative **complessivamente adeguate** e **riconoscendo** modelli o analogie o leggi **generalmente appropriate**	**13 - 19**		
	L4	**Esamina criticamente** la situazione fisica proposta in modo **completo ed esauriente** formulando ipotesi esplicative **adeguate** e riconoscendo modelli o analogie o leggi **appropriati**	**20 - 25**		
Sviluppare il processo risolutivo	L1	Formalizza situazioni problematiche **in modo superficiale** e **non applica** gli strumenti	**0 - 6**	▪ Calcola l'espressione analitica della i(t),	**6**

Formalizzare situazioni problematiche e applicare i concetti e i metodi matematici e gli strumenti disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.		matematici e disciplinari rilevanti per la loro risoluzione		esprimendo sia l'espressione dell'area in funzione del tempo sia il valore della resistenza totale del circuito. ▪ Calcola il valore medio della potenza elettrica erogata. ▪ Determina l'espressione di S(x) e ne verifica l'accordo con la S(x) assegnata. ▪ Determina gli elementi fondamentali della funzione S(x) del grafico. ▪ Calcola l'integrale definito. ▪ Calcola la probabilità come rapporto tra aree.	
	L2	Formalizza situazioni problematiche **in modo parziale** e applica gli strumenti matematici e disciplinari **in modo non sempre corretto** per la loro risoluzione	**7 – 15**		
	L3	Formalizza situazioni problematiche **in modo quasi completo** e applica gli strumenti matematici e disciplinari **generalmente corretto** per la loro risoluzione	**16 - 24**		
	L4	Formalizza situazioni problematiche **in modo completo ed esauriente** e applica gli strumenti matematici e disciplinari **corretti ed ottimali** per la loro risoluzione	**25 - 30**		
Interpretare, rappresentare, elaborare i dati Interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la	L1	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo superficiale non verificandone** la pertinenza al modello scelto	**0 - 5**	▪ Rappresenta il grafico della funzione intensità di corrente elettrica, evidenziandone il valore di I_0 e il periodo della funzione. ▪ Riporta nel grafico le	**5**
	L2	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo parziale** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo non sempre corretto**	**6 - 12**		

pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici.	L3	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo completo** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo corretto**	**13 - 19**	informazioni ottenute sulla funzione S(x). ▪ Interpreta i dati del cellulare per il confronto con i dati teorici.	
	L4	Interpreta e/o elabora i dati proposti, anche di natura sperimentale, **in modo completo ed esauriente** verificandone la pertinenza al modello scelto **in modo corretto ed ottimale**	**20 - 25**		
Argomentare Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.	L1	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo superficiale** e comunica **con un linguaggio specifico** non **appropriato** i risultati ottenuti **non** valutando la coerenza con la situazione problematica proposta	**0 - 4**	▪ Descrive il confronto fra i dati teorici del problema e le proprie conoscenze. ▪ Argomenta le conclusioni del confronto tra le due potenze, quella media calcolata dal grafico e quella prevista dello smartphone. ▪ Argomenta la derivabilità della funzione. ▪ Argomenta la natura delle corrente, delle forze e dei loro versi.	**4**
	L2	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo parziale** e comunica **con un linguaggio specifico** non **sempre appropriato** i risultati ottenuti valutandone **solo in parte** la coerenza con la situazione problematica proposta	**5 - 10**		
	L3	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo completo** e comunica **con un linguaggio specifico** appropriato i risultati ottenuti valutandone **nel complesso** la coerenza con la situazione problematica proposta	**11 - 16**		
	L4	Descrive il processo risolutivo adottato **in modo completo ed esauriente** e comunica **con un linguaggio specifico** appropriato i risultati ottenuti e ne valuta la coerenza con la situazione problematica proposta **in modo ottimale**	**17 - 20**		

TOTALE	56/100		11/20

Esempio numerico;

indicatore 1: punteggio 13/25 (liv. 3) rapportato a 5   13:25=x:5   x=(13/25)*5=2,6

indicatore 2: punteggio 7/30 (liv. 2) rapportato a 6 x=1,4

indicatore 3: punteggio 19/25 (liv. 3) rapportato a 5 x=3,8

indicatore 4: punteggio 17/20 (liv. 4) rapportato a 4 x=3,4

VOTO del compito 11/20 (arrotondato per difetto 11,2)